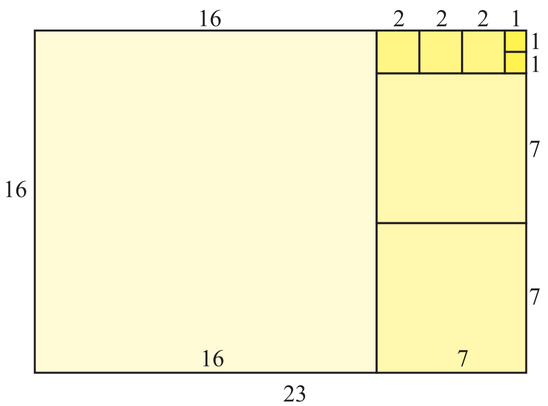
Riječ–dvije o verižnim razlomcima

Branimir Dakić, Zagreb

Za početak promotrimo jedan jednostavan zadatak. Neka je zadan pravokutnik sa stranicama duljina 23 i 16. Od toga pravokutnika možemo odrezati kvadrat 16×16, ostatak je pravokutnik sa stranicama duljina 7 i 16. Od njega pak možemo odrezati dva kvadrata 7×7. Zatim od preostalog pravokutnika (2×7) odrežemo tri kvadrata 2×2 i, konačno, preostali pravokutnik razrežemo na dva kvadratića s duljinom stranice 1.



Zadani smo pravokutnik izrezali na kvadrate, a što smo dobili vidimo i na slici.

Algebarski ispis provedenoga postupka dan je sljedećim nizom jednakosti:

$$\frac{23}{16} = 1 + \frac{7}{16}, \quad \frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7}, \quad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}.$$

Isti ovaj niz jednakosti možemo sažeti na sljedeći način:

$$\frac{23}{16} = 1 + \frac{7}{16} = 1 + \frac{1}{\frac{16}{7}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{7}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}.$$

Iz ovog posljednjeg razlomka možemo jasno iščitati rezultat provedenog razrezivanja. Takav se razlomak zove **verižni** ili **neprekidni razlomak**. Očito, njegov je zapis pomalo nezgrapan pa se stoga uvode praktičniji načini zapisivanja verižnih razlomaka. To bi za naš primjer ovako izgledalo:

$$\frac{23}{16} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = [1; 2, 3, 2].$$

Primijetimo kako je zapis svakog "pravog" razlomka, razlomka kojem je brojnik manji od nazivnika oblika $[0; n_1, n_2, \dots, n_k]$.

Također vrijedi:

$$[n_0; n_1, n_2, \dots, n_k] = [n_0; n_1, n_2, \dots, n_k - 1, 1].$$

Možete li obrazložiti?

Verižni ili neprekidni razlomci pripadaju skupini matematičkih poslastica. Ne samo da su zanimljivi već sami po sebi, nego je i njihova primjena neobično široka i zanimljiva. U ovom članku pokušat ćemo na što jednostavniji i popularniji način obraditi verižne razlomke ne obazirući se previše na dokaze pojedinih tvrdnji od kojih su mnoge ionako sasvim intuitivne i jednostavne.

Prirodno je pitati se: Možemo li svaki pravokutnik čije su duljine stranica cijeli brojevi razrezati u kvadrate na opisani način? Ili, drugim riječima, može li se svaki racionalni broj prikazati u obliku verižnog razlomka?

Odgovor je potvrdan.

Neka je dan pravokutnik $a \times b$, odnosno razlomak $\frac{a}{b}$, gdje su a i b prirodni brojevi. Na brojeve a i b primijenimo **Poučak o dijeljenju s ostatkom:** *Za svaka dva prirodna broja m i n, $m > n$, postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $m = n \cdot q + r$, $0 \leq r < n$.* Broj q je količnik, a r je ostatak pri dijeljenju m s n. Isti poučak primijenimo potom na brojeve n i r te ga nastavimo provoditi sve dok je to izvedivo. Naime, u svakom sljedećem koraku ostaci su manji i manji pa nakon konačno mnogo koraka dolazimo do kraja.

Evo kako to izgleda na primjeru koji smo obradili:

$$23 = 16 \cdot 1 + 7.$$

Nastavimo s primjenom istog poučka na $b = 16$ i $q = 7$:

$$16 = 7 \cdot 2 + 2,$$

i još jednom isto, za $q = 7$ i $q_1 = 2$:

$$7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

I sada slijedi: Iz prve jednakosti je $\frac{23}{16} = 1 + \frac{7}{16}$, iz druge $\frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7}$ te iz treće $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$.

Uvrštavajući unatraške iz treće (posljednje) u drugu (pretposljednju) pa iz druge u prvu jednakost, dobit ćemo raspis broja $\frac{23}{16}$ u verižni razlomak.

Pokazuje se kako je ovakav postupak provediv za svaki racionalni broj i da on sadržava konačan broj koraka. Inače, kako se ne biste zamarali postupkom prevođenja racionalnih brojeva u verižne razlomke i obrnuto, možete se poslužiti kalkulatorom koji će to učiniti časkom umjesto vas*.

Možemo dakle zaključiti:

Svaki se racionalan broj r dade prikazati u obliku konačnog verižnog razlomka.

Dodajmo činjenicu koju je lako provjeriti. Prikaz je jednoznačan uzme li se u obzir da za $n_k > 1$ vrijedi: $r = [n_0; n_1, n_2, \dots, n_k] = [n_0; n_1, n_2, \dots, n_k - 1, 1]$.

* v. www.maths.surrey.ac.uk/.../cfCALC.html

Zadaci

1. Razrežite u kvadrate pravokutnik 52×33.
2. Koji je razlomak dan sljedećim zapisom: $[0; 2, 1, 2, 3]$?
3. Provjerite i obrazložite: za $a = [0; 1, 2, 2, 3,]$ i $b = [1; 2, 2, 3]$ vrijedi $ab = 1$.
4. Pokažite kako za svaki racionalan broj $r = [n; n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k]$ vrijedi:
$$\frac{1}{r} = [0; n, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k].$$

Jedan primjer: kako riješiti linearnu diofantsku jednadžbu?

Linearna diofantska jednadžba s dvjema nepoznanicama $ax + by = c$ jednadžba je kojoj su i koeficijenti a, b i c i rješenja cijeli brojevi. Takva jednadžba, ako ima rješenja, onda ih ima beskonačno mnogo i obuhvaćena su sljedećim poučkom:

Ako je (x_0, y_0) neko (tzv. parcijalno) rješenje linearne diofantske jednadžbe $ax + by = c$, njezino je opće rješenje $(x_0 - bt, y_0 + at)$, $t \in \mathbf{Z}$.

Očito, jednadžbu možemo smatrati riješenom pronađemo li jedno njezino parcijalno rješenje. To se može provesti primjenom verižnih razlomaka. Zasigurno je to čitatelju intuitivno jasno nakon prethodnih objašnjenja kako raspisati neki racionalni broj u verižni razlomak. Bit će svakako još jasnije prikažemo li to na konkretnom primjeru.

Odredimo sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:
$$53x - 37y + 1 = 0.$$

Ranije opisanim postupkom naći ćemo $\frac{53}{37} = [1; 2, 3, 5]$. Otpišemo posljednji broj u ovom zapisu te dobijemo $[1; 2, 3] = \frac{10}{7}$. I sada računamo:
$$\frac{53}{37} - \frac{10}{7} = \frac{1}{37 \cdot 7}.$$

Ova je jednakost ekvivalentna jednakosti:
$$53 \cdot (-7) - 37 \cdot (-10) + 1 = 0.$$

Našli smo jedno parcijalno rješenje zadane jednadžbe, to je uređeni par $(-7, -10)$. Opće rješenje je skup svih uređenih parova $(-7 + 37t, -10 + 53t)$, $t \in \mathbf{Z}$.

Riješimo još i jednadžbu $13x + 7y = 5$.

Najprije imamo: $\frac{13}{7} = [1; 1, 6]$. Zatim izračunamo:
$$\frac{13}{7} - 2 = -\frac{1}{7 \cdot 1}.$$

Pomnožimo posljednju jednakost s -35 pa dobijemo: $13 \cdot (-5) + 7 \cdot 10 = 5$.

Očito, uređeni par $(-5, 10)$ parcijalno je rješenje zadane jednadžbe, a njezino opće rješenje glasi: $(-5 - 7t, 10 + 13t)$, $t \in \mathbf{Z}$.

A beskonačni verižni razlomci? Što je s njima?

Sljedeće neizbježno pitanje glasi: što je s beskonačnim verižnim razlomcima? Postoje li i što predstavljaju?

Slutnja da beskonačni verižni razlomci predstavljaju iracionalne brojeve pokazuje se točnom. Uzmimo za primjer raspis broja $\sqrt{2}$.

Broj $\sqrt{2}$ veći je od 1 pa ga zapišimo u obliku: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}, x > 1$. Slijedi $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x}$ te je: $x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 1 + \frac{1}{x} + 1 = 2 + \frac{1}{x}$.

Dakle:
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

Očigledno, ovaj je verižni razlomak beskonačan. Svaki konačan broj $[1; 2, 2, \ldots, 2]$ racionalna je aproksimacija broja $\sqrt{2}$. Uzmimo za primjer nekoliko početnih vrijednosti:

$$
\begin{aligned}
{[1; 2]} &= \frac{3}{2} = 1.5, \\
{[1; 2, 2]} &= \frac{7}{5} = 1.4, \\
{[1; 2, 2, 2]} &= \frac{17}{12} = 1.41\dot{6}, \\
{[1; 2, 2, 2, 2]} &= \frac{41}{29} = 1.41379\ldots, \\
{[1; 2, 2, 2, 2, 2]} &= \frac{99}{70} = 1.4142857\ldots.
\end{aligned}
$$

Posljednji je rezultat približna vrijednost broja $\sqrt{2}$ s točnošću prvih četiriju decimala. Naime, $\sqrt{2} = 1.414213562373095...$

Uloga verižnih razlomaka u zadacima aproksimacije realnih brojeva racionalnim jedna je od najočiglednijih i najkorisnijih. Upućujemo čitatelje na članak naveden pod [2] u kojem dr. Andrej Dujella pokazuje kako se verižni razlomci primjenjuju pri rješavanju problema kalendara. O verižnim razlomcima i njihovoj mogućoj primjeni u Teoriji glazbe piše dr. Zvonimir Šikić u [6].

Postupkom koji je analogan ovom što smo ga proveli za $\sqrt{2}$ našli bismo raspis i ostalih brojeva $\sqrt{n}, n \in \mathbf{N}$ u verižne razlomke.

Za brojeve koji su nepotpuni kvadrati manji od 20 dobili bismo sljedeće rezultate.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3} &= [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] \\
\sqrt{5} &= [2; 4, 4, 4, \ldots] \\
\sqrt{6} &= [2; 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots] \\
\sqrt{7} &= [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] \\
\sqrt{8} &= [2; 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots] \\
\sqrt{10} &= [3; 6, 6, 6, \ldots] \\
\sqrt{11} &= [3; 3, 6, 3, 6, 3, 6, \ldots] \\
\sqrt{12} &= [3; 2, 6, 2, 6, 2, 6, \ldots] \\
\sqrt{13} &= [3; 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \ldots] \\
\sqrt{14} &= [3; 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \ldots] \\
\sqrt{15} &= [3; 1, 6, 1, 6, 1, 6, \ldots] \\
\sqrt{17} &= [4; 8, 8, 8, \ldots] \\
\sqrt{18} &= [4; 4, 8, 4, 8, 4, 8, \ldots] \\
\sqrt{19} &= [4; 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, \ldots] \\
\sqrt{20} &= [4; 2, 8, 2, 8, 2, 8, \ldots]
\end{aligned}
$$

Valja primijetiti kako su raspisi svih brojeva $\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}$ beskonačni i periodični.

Dodajmo ovdje još jedan zanimljiv primjer.

Popularni problem zlatnog reza dužine vodi nas do kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Zapišimo ovu jednadžbu u obliku $x = 1 + \frac{1}{x}$. Uzastopnim uvrštavanjem imamo:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} \\
&= \ldots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots] \approx 1.618033989.$

Što je s brojevima kao što su e i π?

I pri kraju: Vidjeli smo kako se svaki racionalan broj dade prikazati u obliku konačnog verižnog razlomka. Također smo vidjeli kako su beskonačni periodični verižni razlomci pridruženi drugim korijenima iz cijelih brojeva koji nisu potpuni kvadrati. Slično bismo zaključili i za ostale realne algebarske brojeve i to bi za pretenzije ovog članka bilo sasvim dovoljno.

Ali, svakako ćemo se upitati: Što je s brojevima koji nisu algebarski, posebice s onim najpoznatijima, s e i π?

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}}}}.$$

Ili, u pogodnijem zapisu, bilo bi:

$$\begin{aligned}\pi = [3;&7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,\\&2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,\\&6,99,1,2,2,6,3,5,1,1,6,8,1,7,1,2,3,\\&7,1,2,1,1,12,1,1,1,3,1,1,8,1,1,2,1,\\&6,1,1,5,2,2,3,1,2,4,4,16,1,161,45,1,\\&22,1,2,2,1,4,1,2,\dots]\end{aligned}$$

Ako ovo more brojki suzimo na svega dvije, tada će biti $\pi \approx [3;7] = \frac{22}{7}$, a to je znamenita Arhimedova aproksimacija broja π.

Zanimljiv je i zapis broja $e = 2.71828182...$

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,\dots].$$

Zanimljivo je da se ispis nastavlja po pravilu koje ste vjerojatno uočili. A zanimljivi su i neki raspisi ovih brojeva u oblik koji je blizak verižnim razlomcima. Evo dvaju zapisa broja π.

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\dots}}}}}$$

$$= 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\dots}}}}}.$$

Malo povijesti

I na kraju, malo povijesti. U koje razdoblje smjestiti pojavu verižnih razlomaka? Kao što je i inače na takva pitanja teško dati odlučan odgovor, tako je to i u ovom slučaju. No verižni razlomci svakako nisu nešto što bi se moglo pripisati novijem matematičkom dobu. Povjesničari matematike drže kako ideja seže u daleku prošlost, sve do Euklida, čiji poznati algoritam možemo primjenjivati pri raspisu racionalnih brojeva u verižne razlomke. Poznati povjesničar matematike Morris Kline (1908. – 1992.) navodi da je indijski matematičar Aryabhata (475. – 550.) upotrebljavao verižne razlomke pri rješavanju linearnih diofantskih jednadžbi.

Ipak, sustavno se ovim područjem matematičari počinju baviti od druge polovine 16. stoljeća naovamo. Bolonjezi Rafael Bombelli (1526. – 1572.) i Pietro Cataldi (1548. – 1626.) dali su verižne razlomke za brojeve $\sqrt{13}$ i $\sqrt{18}$. Godine 1695. u knjizi *Opera Mathematica* John Wallis (1616. – 1703.) obrađuje verižne razlomke na teorijskoj razini. Wallisu se pripisuje i sam njihov naziv.

Nizozemac Christiaan Huygens (1629. – 1695.) demonstrirao je 1687. prvu praktičnu primjenu verižnih razlomaka, a radilo se o problemu zupčanika. Taj mu se problem nametnuo pri projektiranju mehaničkog simulatora sunčanog sustava.

Verižnim se razlomcima na teorijskoj razini bavio i Leonhard Euler (1707. – 1783.) pa je tako možda i prvi dokazao da se svaki racionalan broj dade prikazati u obliku konačnog verižnog razlomka. Euler je dao i sljedeću jednakost:

$$e-1 = [1;1,1,2,1,1,4,1,1,6,\dots].$$

Primjenjujući ovaj rezultat on je dokazao iracionalnost broja e. Johann Lambert (1728. – 1777.) poopćio je Eulerov rezultat te dokazao da su za iracionalne x brojevi e^x i $\operatorname{tg} x$ iracionalni. Primjenom verižnih razlomaka on je 1761. dokazao iracionalnost broja π. Joseph Louis Lagrange (1736. – 1813.) je pak 1768. uz primjenu verižnih razlomaka došao do općeg rješenja Pellove jednadžbe, a 1770. dokazao je da je svaki iracionalni korijen algebarske jednadžbe beskonačan periodičan verižni razlomak. Teorem u kojem se tvrdi da postoji bijekcija između "kvadratnih iracionalnosti" i periodičnih verižnih razlomaka upravo nosi Lagrangeovo ime. Pri ovom navođenju ne treba izostaviti ni Jacobija, ni Hermitea, Gaussa i Stieltjesa.

No zlatno doba verižnih razlomaka nastupa krajem 19. stoljeća. Claude Brezinski kaže kako tada i nije bilo matematičara koji se nije bavio ovim područjem. U 20. stoljeću verižni razlomci šire se na razna područja matematike i njezine primjene, prije svega na algoritme za izračunavanje racionalnih aproksimacija iracionalnih brojeva i na rješavanje diofantskih jednadžbi. Ne zaboravimo da smo u prošlom broju MiŠ-a naveli kako se u jednoj metodi rješavanja Pellove jednadžbe, a na tu se jednadžbu svodi rješavanje Arhimedova problema stoke, primjenjuju upravo verižni razlomci.

Ako pak netko misli da je vrijeme pregazilo ove čudesne razlomke pa oni pripadaju matematičkoj povijesti, onda se vara. Neka samo pogleda, primjerice, radove Roba Corlessa koji istražuje njihovu povezanost s teorijom kaosa.

* * *

Napomena: U obilju štiva o verižnim ili neprekidnim razlomcima što se nalazi na internetu, svakako je preporučljiv opsežan i metodički vrlo lijepo obrađen, pa samim tim i pristupačan nadarenijim učenicima, tekst naveden pod [7].

LITERATURA

1/ Gelfond, A. O. *Solving Equations in Integers*, Mir Publishers, Moskva.

2/ Dujella, A., *Verižni razlomci i problem kalendara*, MiŠ, 2/1999.

3/ Pavković, Dakić, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb 1987.

4/ Beskin, N. M., *Fascinating Fractions*, Mir Publishers, Moscow, 1980.

5/ Khinchin, A. Ya, *Continued Fractions*, Dover Publ., 1964.

6/ Šikić, Z., *Matematika i muzika*, HMD, Zagreb, 1999.

7/ `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html`

Radionica "Modeliranje s *GeoGebrom*"

Udruga nastavnika matematike "Normala" nakon vrlo uspjelog stručnog skupa nastavila je svoje aktivnosti provedbom radionice u kojoj su nastavnici ovladavali *GeoGebrom*, danas vjerojatno najraširenijim i za uporabu u nastavnoj praksi najpogodnijim računalnim matematičkim programom. Radionica je provedena 28. i 29. 12. 2009. od 9 do 14 sati u informatičkoj učionici Devete gimnazije u Zagrebu. Voditelji su bili profesori Ela Rac i Milan Kabić, a pomagao im je Josip Kličinović. Sveсrdnu im je pomoć pružila i voditeljica informatičke učionice Sonja Lušić Radošević, i to ne samo u tehničkom smislu već i u stručnom. Polaznici su pokazali veliko zanimanje i upornost u radu, a od Agencije za odgoj i obrazovanje dobili su potvrde o stručnom usavršavanju.

To što je radionica organizirana u toj školi nije nimalo slučajno. Spomenimo samo kako su krajem prošle godine učenici III. A razreda Devete gimnazije pod stručnim nadzorom profesorice Ariane Blažić osvojili prestižnu nagradu *Edublog Awards* u kategoriji *Best Educational Wiki*. U natjecanju je bio prijavljen 491 projekt iz cijelog svijeta, a naši su gimnazijalci pobijedili u kategoriji u kojoj je bilo prijavljeno 39 radova.