VEKTORI (m©h)

skalar

veličina koja je potpuno određena realnim brojem (skalarom)

Primjer masa, energija, temperatura, rad, snaga, obujam tijela

vektor

dužina kod koje je određeno koja je njezina rubna točka početna, a koja završna naziva se usmjerena dužina ili vektor

vektor

vektor se u geometriji naziva orijentirana dužina $\overline{AB}$, u oznaci $\vec{AB} = \vec{a}$

točka A zove se početna točka (hvatište), a točka B završna točka (kraj, vrh, zaperak) vektora $\vec{AB}$

Primjer brzina, akceleracija, sila, kutna brzina, električno polje, magnetsko polje

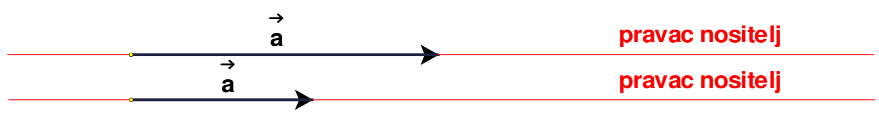
elementi vektora

- modul (apsolutna vrijednost ili iznos vektora ili duljina vektora), $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$, je duljina dužine $\overline{AB}$
- orijentacija ili usmjerenje od **A** prema **B** orijentacija ili usmjerenje od **B** prema **A**

- smjer vektora, pravac na kojem leži vektor $\vec{AB}$ nazivamo pravcem nositeljem vektora $\vec{AB}$

kolinearni vektori

ako su pravci nositelji vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ usporedni (paralelni) kažemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smjera ili da su kolinearni vektori



nul-vektor

vektor čiji je modul jednak nuli naziva se nul-vektor i označava $\vec{0}$

jedinični vektor

vektor čiji je modul jednak jedinici naziva se jedinični vektor ili ort, jedinični vektor vektora $\vec{a}$ označava se $\vec{a}_0$

slobodni, vezani i klizni vektori

- slobodni vektori su oni kojima se ne mijenja modul ni smjer kada translatiramo njihove početne i krajnje točke
- vezani vektori su svi vektori koji moraju imati istu početnu točku
- klizni vektor je onaj koji se ne mijenja ako ga translatiramo duž pravca na kojem leži

jednakost vektora

- dva su vektora jednaka ako su istog smjera, orijentacije i jednake duljine
- vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jednaki ako imaju jednake module, tj. $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ i ako imaju isti smjer, znači da su paralelni i jednako orijentirani

relacija ekvivalencije

jednakost vektora je relacija ekvivalencije u skupu vektora:

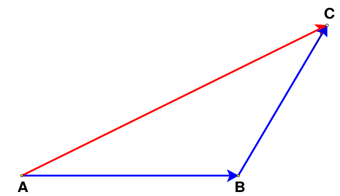
$\vec{a}=\vec{a}$ (refleksivnost), $\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow\vec{b}=\vec{a}$ (simetričnost), $\vec{a}=\vec{b}$ i $\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow\vec{a}=\vec{c}$ (tranzitivnost)

suprotni vektor

dva kolinearna vektora jednake duljine, ali suprotne orijentacije nazivamo suprotni vektori

ako je $\vec{a}$ vektor, njegov suprotni vektor označavamo $-\vec{a}$

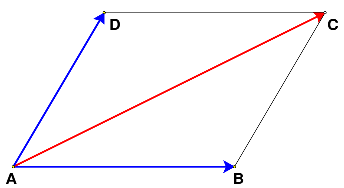
zbrajanje vektora (pravilo trokuta)



zbroj vektora $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$ je vektor $\vec{AC}$, tj. vektor kojem je početna točka početna točka prvog pribrojnika, a krajnja točka krajnja točka drugog pribrojnika

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$

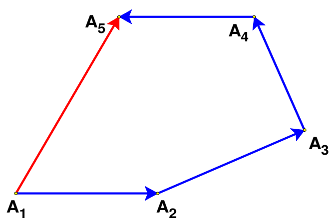
zbrajanje vektora (pravilo paralelograma)



odaberemo vektore $\vec{AB}$ i $\vec{AD}$ koji imaju isti početak A, ti vektori određuju paralelogram ABCD, a zbroj $\vec{AB}+\vec{AD}$ je dijagonala $\vec{AC}$ koja ima početak u točki A

$$\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{AC}$$

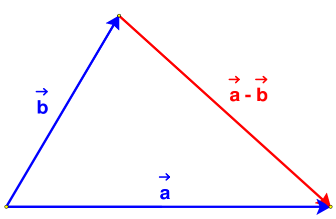
zbrajanje vektora (zbroj više vektora)



zbroj n nadovezanih vektora $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_2A_3}$, $\vec{A_3A_4}$, ... , $\vec{A_{n-1}A_n}$ jednak je vektoru $\vec{A_1A_n}$, tj. vektoru kojem je početna točka jednaka početnoj točki prvog pribrojnika, a završna točka je završna točka posljednjeg pribrojnika

$$\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\vec{A_3A_4}+\vec{A_4A_5}=\vec{A_1A_5}$$

oduzimanje vektora



razlika dvaju vektora $\vec{a}-\vec{b}$ definira se kao zbroj vektora $\vec{a}$ i $-\vec{b}$ pa je $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

razliku $\vec{a}-\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo geometrijski predočiti tako da se vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedu na zajednički početak pa će vektor $\vec{a}-\vec{b}$ biti onaj vektor koji se dobije spajanjem krajnje točke umanjenika $\vec{a}$ sa krajnjom točkom umanjitelja $\vec{b}$, vektor $\vec{a}-\vec{b}$ ima početak u kraju $\vec{b}$, a kraj u kraju $\vec{a}$

svojstva zbrajanja vektora

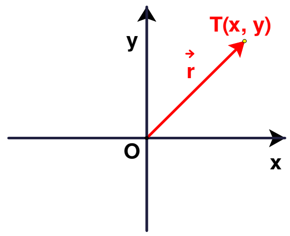
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ komutativnost , $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ asocijativnost

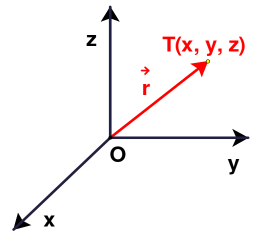
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ $\vec{0}$ je neutralni element zbrajanja , $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$ $-\vec{a}$ je suprotni vektor vektora $\vec{a}$

radijvektor

radijvektorom $\vec{r}$ neke točke T zovemo vektor $\vec{OT}$ kojem je ishodište O početna točka, a krajnja mu je točka u T, točku O zovemo polom, točka T je potpuno određena svojim radijvektorom





množenje vektora realnim brojem (skalarom)

umnožak (produkt) realnog broja $k \neq 0$ i vektora $\vec{a}$ je vektor koji označavamo $k \cdot \vec{a}$ takav da vrijedi:

- vektori $\vec{a}$ i $k \cdot \vec{a}$ su kolinearni
- $\vec{a}$ i $k \cdot \vec{a}$ su jednake orijentacije ako je $k > 0$
- $\vec{a}$ i $k \cdot \vec{a}$ su suprotne orijentacije ako je $k < 0$
- duljina vektora $k \cdot \vec{a}$ jednaka je $|k| \cdot \left|\vec{a}\right|$
- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ umnožak nule i vektora je nul-vektor
- ako je $k = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ onda je $k \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- pri množenju vektora $\vec{a}$ brojem $k > 1$ vektor $\vec{a}$ se "rasteže" k puta i ima istu orijentaciju
- pri množenju vektora $\vec{a}$ brojem $k < -1$ vektor $\vec{a}$ se "rasteže" k puta i ima suprotnu orijentaciju
- pri množenju vektora $\vec{a}$ brojem $0 < k < 1$ vektor $\vec{a}$ se "steže" k puta i ima istu orijentaciju
- pri množenju vektora $\vec{a}$ brojem $-1 < k < 0$ vektor $\vec{a}$ se "steže" k puta i ima suprotnu orijentaciju
- $\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \vec{a_0}$

rastezanje vektora zove se dilatacija, a stezanje kontrakcija vektora

svojstva množenja realnog broja i vektora

za svaka dva realna broja α i β, te za svaka dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi:

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$
- $\alpha \cdot \left(\beta \cdot \vec{a}\right) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
- $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

Primjer $7 \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) - 2 \cdot \left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) = 7\vec{a} + 7\vec{b} - 4\vec{a} + 6\vec{b} = 3\vec{a} + 13\vec{b}$

linearna kombinacija

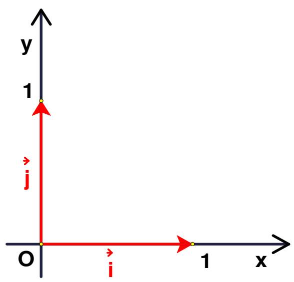
- ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori i α, β realni brojevi tada se vektor $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ naziva linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s koeficijentima α i β
- zbroj umnožaka vektora $\vec{a_i}$ i skalara α_i (i = 1, 2, 3, ... , n) naziva se linearna kombinacija vektora $\vec{a_i}$

tj. $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 + \ \ldots \ + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a}_i$, skalari α_i nazivaju se koeficijenti linearne kombinacije

linearna zavisnost i nezavisnost

- vektori $\vec{a}_i$ su linearno nezavisni ako je njihova linearna kombinacija $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$ kada su svi koeficijenti α_i (i = 1, 2, 3, ... , n) jednaki nuli
- vektori $\vec{a}_i$ su linearno zavisni ako je njihova linearna kombinacija $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$ kada nisu svi koeficijenti α_i (i = 1, 2, 3, ... , n) jednaki nuli
- u ravnini su svaka dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ujedno i linearno zavisna, tj. postoji realan broj k tako da vrijedi $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$
- svaka tri vektora ravnine su linearno zavisna
- ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori ravnine tada su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni

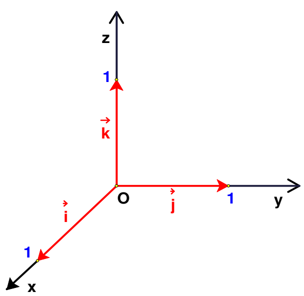
vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$



vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ su jedinični vektori, međusobno okomiti, nekolinearni, tj. linearno nezavisni vektori

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1 \qquad , \qquad \vec{i} \perp \vec{j}$$

vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$



vektori $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ su jedinični vektori, međusobno okomiti, nekolinearni, tj. linearno nezavisni vektori

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1 \qquad , \qquad \vec{i} \perp \vec{j} \ , \ \vec{i} \perp \vec{k} \ , \ \vec{j} \perp \vec{k}$$

radijvektor

za točku T(x, y) radijvektor $\vec{OT}$ ima prikaz $\vec{r} = \vec{OT} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (x, y)$

za točku T(x, y, z) radijvektor $\vec{OT}$ ima prikaz $\vec{r} = \vec{OT} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = (x, y, z)$

nul-vektor

$\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ ili $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$

prikaz vektora $\vec{AB}$ pomoću $\vec{i}$ i $\vec{j}$

$$\left.\begin{matrix} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

ako za vektor koristimo oznaku $\vec{a}$ tada za koordinate rabimo oznake a_x i a_y ili a_1 i a_2 , tj.

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}=(a_x,\,a_y)=(a_1,\,a_2)$$

prikaz vektora $\vec{AB}$ pomoću $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$

$$\left.\begin{array}{l}A(x_1,\,y_1,\,z_1)\\B(x_2,\,y_2,\,z_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\ \vec{AB}=(x_2-x_1)\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)\cdot\vec{j}+(z_2-z_1)\cdot\vec{k}$$

ako za vektor koristimo oznaku $\vec{a}$ tada za koordinate rabimo oznake a_x , a_y i a_z ili a_1 , a_2 i a_3 , tj.

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}+a_3\cdot\vec{k}=(a_x,\,a_y,\,a_z)=(a_1,\,a_2,\,a_3)$$

jednakost vektora

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\\\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \vec{a}=\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_x=b_x\ ,\ a_y=b_y$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\\\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \vec{a}=\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_x=b_x\ ,\ a_y=b_y\ ,\ a_z=b_z$$

duljina vektora

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\ \Rightarrow\ \left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\qquad,\qquad\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\ \Rightarrow\ \left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

zbrajanje i oduzimanje vektora

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\\\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\cdot\vec{i}+(a_y+b_y)\cdot\vec{j}\\\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\cdot\vec{i}+(a_y-b_y)\cdot\vec{j}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\\\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\cdot\vec{i}+(a_y+b_y)\cdot\vec{j}+(a_z+b_z)\cdot\vec{k}\\\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\cdot\vec{i}+(a_y-b_y)\cdot\vec{j}+(a_z-b_z)\cdot\vec{k}\end{array}\right.$$

množenje skalara i vektora

$$\alpha\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\right)=(\alpha\cdot a_x)\cdot\vec{i}+(\alpha\cdot a_y)\cdot\vec{j}$$

$$\alpha\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\right)=(\alpha\cdot a_x)\cdot\vec{i}+(\alpha\cdot a_y)\cdot\vec{j}+(\alpha\cdot a_z)\cdot\vec{k}$$

jedinični vektor (ort)

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}\cdot\vec{i}+\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\cdot\vec{i}+\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\cdot\vec{j}+\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\cdot\vec{k}$$

skalarni produkt vektora

skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\bullet\vec{b}$ je broj (skalar) koji ovako definiramo:

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)$

svojstva skalarnog produkta

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a} \quad , \quad \vec{a}\bullet\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{c} \quad , \quad \left(\alpha\cdot\vec{a}\right)\bullet\vec{b}=\alpha\cdot\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right) \ , \ \alpha\in R \quad , \quad \vec{a}\bullet\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\bullet\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^{2}>0 \ , \ \vec{a}\neq\vec{0} \quad , \quad \left|\vec{a}\bullet\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| \quad , \quad \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 0\leq\varphi<90^{0} \Leftrightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}>0 \\ 90^{0}<\varphi\leq180^{0} \Leftrightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}<0 \end{array}\right\}$$

skalarni produkt izražen pomoću koordinata vektora

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j} \\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k} \\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\bullet\vec{b} \Leftrightarrow a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

uvjet okomitosti

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j} \\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k} \\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0$$

tablica skalarnog množenja jediničnih vektora

•	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

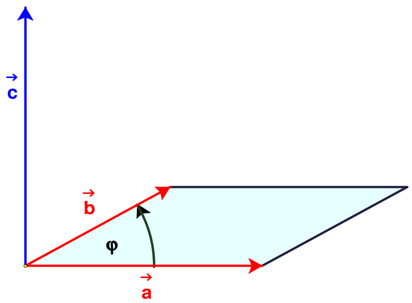
$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} \quad , \quad \cos\varphi=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}} \quad , \quad \cos\varphi=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

uvjet paralelnosti (usporednosti)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j} \\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\alpha \ , \ \alpha\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}\iff \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\alpha\ ,\ \alpha\in R$$

vektorski produkt vektora



vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}$, je vektor $\vec{c}$ okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$, orijentacija od $\vec{c}$ je dana pravilom desnog vijka, tj. dana je smislom napredovanja vijka pri njegovu zakretanju od prvog vektora prema drugom najkraćim putem u smjeru gibanja kazaljke sata

modul vektora $\vec{c}$ jednak je površini paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi\quad,\quad \vec{c}\perp\vec{a}\quad,\quad \vec{c}\perp\vec{b}$$

svojstva vektorskog produkta

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}\qquad,\qquad \alpha\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\alpha\cdot\vec{b}\right)\ ,\ \alpha\in R$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\qquad,\qquad \vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\qquad,\qquad \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\qquad,\qquad \vec{a}\perp\vec{b}\ \Rightarrow\ \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$$

površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

tablica vektorskog množenja jediničnih vektora

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

vektorski produkt izražen pomoću koordinata vektora

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\left(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\right)\cdot\vec{i}+\left(a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\right)\cdot\vec{j}+\left(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\right)\cdot\vec{k}$$

mješoviti produkt

mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalar (broj) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}$ koji je brojčano jednak obujmu paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$

mješoviti produkt je pozitivan ako $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tvore desni sustav vektora, a negativan u protivnom slučaju

$$V = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \bullet \vec{c} \right|$$

mješoviti produkt je jednak nuli ako:

- je jedan od vektora nul-vektor
- su dva bilo koja vektora kolinearna
- su vektori komplanarni (leže u jednoj ravnini ili su paralelni s istom ravninom)

svojstva mješovitog produkta

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \bullet \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \bullet \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \bullet \vec{b} \quad , \quad \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \bullet \vec{c} = -\left(\vec{b} \times \vec{a} \right) \bullet \vec{c}$$

$$\left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \bullet \vec{a} = -\left(\vec{c} \times \vec{b} \right) \bullet \vec{a} \quad , \quad \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \bullet \vec{b} = -\left(\vec{a} \times \vec{c} \right) \bullet \vec{b}$$

$$\alpha \cdot \left(\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \bullet \vec{c} \right) = \left(\alpha \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right) \bullet \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \bullet \left(\alpha \cdot \vec{b} \right) \text{ , } \alpha \in R$$

$$\left(\left(\vec{a} + \vec{b} \right) \times \vec{c} \right) \bullet \vec{d} = \left(\vec{a} \times \vec{c} \right) \bullet \vec{d} + \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \bullet \vec{d}$$

mješoviti produkt u koordinatnom obliku

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \\ \vec{c} &= c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \bullet \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

uvjet komplanarnosti tri vektora u koordinatnom obliku

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \\ \vec{c} &= c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

obujam tetraedra konstruiranog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \bullet \vec{c} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|$$

dvostruki vektorski produkt

dvostruki vektorski produkt $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)$ je vektor komplanaran s vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{c} \right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$$

dvostruki vektorski produkt $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c}$ je vektor komplanaran s vektorima $\vec{b}$ i $\vec{a}$:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \bullet \vec{c} \right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{b} \bullet \vec{c} \right) \cdot \vec{a}$$

svojstva dvostrukog vektorskog produkta

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \times \vec{a} + \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \times \vec{b} = \vec{0} \quad \text{(Jacobijev identitet)}$$