

VEKTORI (mCh)

skalar

veličina koja je potpuno određena realnim brojem (skalarom)

Primjer masa, energija, temperatura, rad, snaga, obujam tijela

vektor

dužina kod koje je određeno koja je njezina rubna točka početna, a koja završna naziva se usmjerena dužina ili vektor

vektor

vektor se u geometriji naziva orijentirana dužina \overline{AB} , u oznaci $\vec{AB} = \vec{a}$



točka A zove se početna točka (hvatište), a točka B završna točka (kraj, vrh, zaperak) vektora \vec{AB}

Primjer brzina, akceleracija, sila, kutna brzina, električno polje, magnetsko polje

elementi vektora

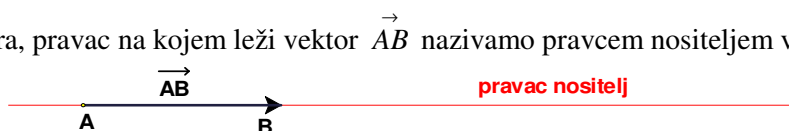
- modul (apsolutna vrijednost ili iznos vektora ili duljina vektora), $|\vec{AB}| = |\vec{a}|$, je duljina dužine \overline{AB}
- orijentacija ili usmjerenje od A prema B



orijentacija ili usmjerenje od B prema A

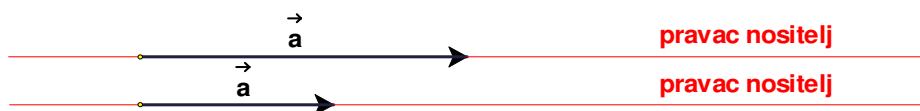


- smjer vektora, pravac na kojem leži vektor \vec{AB} nazivamo pravcem nositeljem vektora \vec{AB}



kolinearni vektori

ako su pravci nositelji vektora \vec{a} i \vec{b} usporedni (paralelni) kažemo da su vektori \vec{a} i \vec{b} istog smjera ili da su kolinearni vektori



nul-vektor

vektor čiji je modul jednak nuli naziva se nul-vektor i označava $\vec{0}$

jedinični vektor

vektor čiji je modul jednak jedinici naziva se jedinični vektor ili ort, jedinični vektor vektora \vec{a} označava se \vec{a}_0

slobodni, vezani i klizni vektori

- slobodni vektori su oni kojima se ne mijenja modul ni smjer kada transliramo njihove početne i krajnje točke
- vezani vektori su svi vektori koji moraju imati istu početnu točku
- klizni vektor je onaj koji se ne mijenja ako ga transliramo duž pravca na kojem leži

jednakost vektora

- dva su vektora jednaka ako su istog smjera, orijentacije i jednake duljine
- vektori \vec{a} i \vec{b} su jednaki ako imaju jednake module, tj. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ i ako imaju isti smjer, znači da su paralelni i jednako orijentirani

relacija ekvivalencije

jednakost vektora je relacija ekvivalencije u skupu vektora:

$$\vec{a} = \vec{a} \text{ (refleksivnost)}, \quad \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a} \text{ (simetričnost)}, \quad \vec{a} = \vec{b} \text{ i } \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c} \text{ (tranzitivnost)}$$

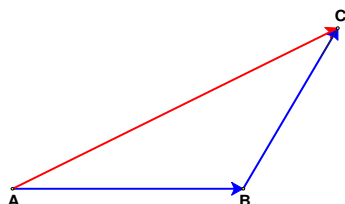
suprotni vektor

dva kolinearna vektora jednake duljine, ali suprotne orijentacije nazivamo suprotni vektori

ako je \vec{a} vektor, njegov suprotni vektor označavamo $-\vec{a}$



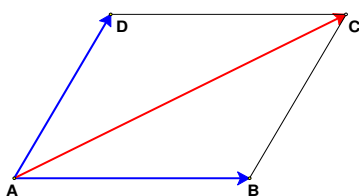
zbrajanje vektora (pravilo trokuta)



zbroj vektora \vec{AB} i \vec{BC} je vektor \vec{AC} , tj. vektor kojem je početna točka početna točka prvog pribrojnika, a krajnja točka krajnja točka drugog pribrojnika

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

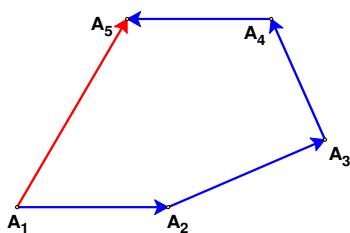
zbrajanje vektora (pravilo paralelograma)



odaberemo vektore \vec{AB} i \vec{AD} koji imaju isti početak A, ti vektori određuju paralelogram ABCD, a zbroj $\vec{AB} + \vec{AD}$ je dijagonala \vec{AC} koja ima početak u točki A

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

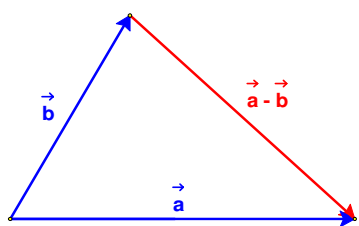
zbrajanje vektora (zbroj više vektora)



zbroj n nadovezanih vektora $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_2A_3}$, $\vec{A_3A_4}$, ..., $\vec{A_{n-1}A_n}$ jednak je vektoru $\vec{A_1A_n}$, tj. vektoru kojem je početna točka jednaka početnoj točki prvog pribrojnika, a završna točka je završna točka posljednjeg pribrojnika

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{A_4A_5} = \vec{A_1A_5}$$

oduzimanje vektora



razlika dvaju vektora $\vec{a} - \vec{b}$ definira se kao zbroj vektora \vec{a} i $-\vec{b}$ pa je $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

razliku $\vec{a} - \vec{b}$ vektora \vec{a} i \vec{b} možemo geometrijski predočiti tako da se vektori \vec{a} i \vec{b} dovedu na zajednički početak pa će vektor

$\vec{a} - \vec{b}$ biti onaj vektor koji se dobije spajanjem krajnje točke umanjnika \vec{a} sa krajnjom točkom umanjitelja \vec{b} , vektor $\vec{a} - \vec{b}$ ima početak u kraju \vec{b} , a kraj u kraju \vec{a}

svojstva zbrajanja vektora

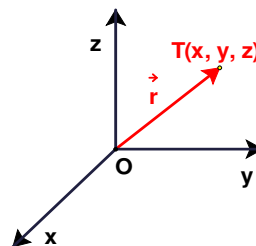
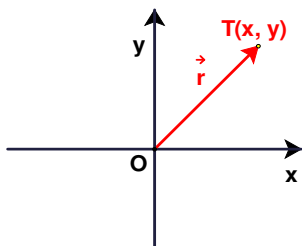
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ komutativnost}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \text{ asocijativnost}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \vec{0} \text{ je neutralni element zbrajanja}, \quad \left| \vec{a} + \vec{b} \right| \leq \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right|$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0} \quad -\vec{a} \text{ je suprotni vektor vektora } \vec{a}$$

radijvektor

radijvektorom \vec{r} neke točke T zovemo vektor \vec{OT} kojem je ishodište O početna točka, a krajnja mu je točka u T, točku O zovemo polom, točka T je potpuno određena svojim radijvektorom



množenje vektora realnim brojem (skalarnom)

umnožak (produkt) realnog broja $k \neq 0$ i vektora \vec{a} je vektor koji označavamo $k \cdot \vec{a}$ takav da vrijedi:

- vektori \vec{a} i $k \cdot \vec{a}$ su kolinearni
- \vec{a} i $k \cdot \vec{a}$ su jednake orijentacije ako je $k > 0$
- \vec{a} i $k \cdot \vec{a}$ su suprotne orijentacije ako je $k < 0$
- duljina vektora $k \cdot \vec{a}$ jednaka je $|k| \cdot |\vec{a}|$
- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ umnožak nule i vektora je nul-vektor
- ako je $k = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ onda je $k \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- pri množenju vektora \vec{a} brojem $k > 1$ vektor \vec{a} se "rasteže" k puta i ima istu orijentaciju
- pri množenju vektora \vec{a} brojem $k < -1$ vektor \vec{a} se "rasteže" k puta i ima suprotnu orijentaciju
- pri množenju vektora \vec{a} brojem $0 < k < 1$ vektor \vec{a} se "steže" k puta i ima istu orijentaciju
- pri množenju vektora \vec{a} brojem $-1 < k < 0$ vektor \vec{a} se "steže" k puta i ima suprotnu orijentaciju
- $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$

rastezanje vektora zove se dilatacija, a stezanje kontrakcija vektora

svojstva množenja realnog broja i vektora

za svaka dva realna broja α i β , te za svaka dva vektora \vec{a} i \vec{b} vrijedi:

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
- $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

Primjer $7 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - 2 \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 7\vec{a} + 7\vec{b} - 4\vec{a} + 6\vec{b} = 3\vec{a} + 13\vec{b}$

linearna kombinacija

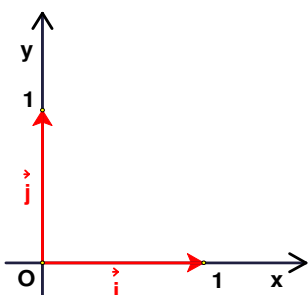
- ako su \vec{a} i \vec{b} vektori i α, β realni brojevi tada se vektor $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ naziva linearna kombinacija vektora \vec{a} i \vec{b} s koeficijentima α i β
- zbroj umnožaka vektora \vec{a}_i i skalara α_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) naziva se linearna kombinacija vektora \vec{a}_i

tj. $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{a}_i$, skalari α_i nazivaju se koeficijenti linearne kombinacije

linearna zavisnost i nezavisnost

- vektori \vec{a}_i su linearno nezavisni ako je njihova linearna kombinacija $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$ kada su svi koeficijenti α_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) jednaki nuli
- vektori \vec{a}_i su linearno zavisni ako je njihova linearna kombinacija $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$ kada nisu svi koeficijenti α_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) jednaki nuli
- u ravni su svaka dva kolinearna vektora \vec{a} i \vec{b} ujedno i linearno zavisna, tj. postoji realan broj k tako da vrijedi $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$
- svaka tri vektora ravnine su linearno zavisna
- ako su \vec{a} i \vec{b} nekolinearni vektori ravnine tada su \vec{a} i \vec{b} linearno nezavisni

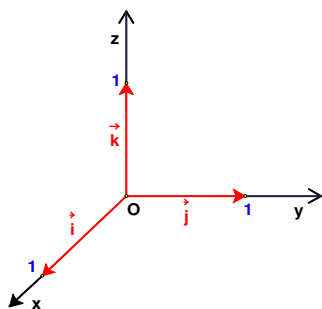
vektori \vec{i} i \vec{j}



vektori \vec{i} i \vec{j} su jedinični vektori, međusobno okomiti, nekolinearni, tj. linearno nezavisni vektori

$$\left| \vec{i} \right| = \left| \vec{j} \right| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}$$

vektori \vec{i} , \vec{j} i \vec{k}



vektori \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} su jedinični vektori, međusobno okomiti, nekolinearni, tj. linearno nezavisni vektori

$$\left| \vec{i} \right| = \left| \vec{j} \right| = \left| \vec{k} \right| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$$

radijvektor

za točku $T(x, y)$ radijvektor \vec{OT} ima prikaz $\vec{r} = \vec{OT} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (x, y)$

za točku $T(x, y, z)$ radijvektor \vec{OT} ima prikaz $\vec{r} = \vec{OT} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = (x, y, z)$

nul-vektor

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} \quad \text{ili} \quad \vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

prikaz vektora \vec{AB} pomoću \vec{i} i \vec{j}

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

ako za vektor koristimo oznaku \vec{a} tada za koordinate rabimo oznake a_x i a_y ili a_1 i a_2 , tj.

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} = (a_x, a_y) = (a_1, a_2)$$

prikaz vektora \vec{AB} pomoću \vec{i} , \vec{j} i \vec{k}

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1, z_1) \\ B(x_2, y_2, z_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}$$

ako za vektor koristimo oznaku \vec{a} tada za koordinate rabimo oznake a_x , a_y i a_z ili a_1 , a_2 i a_3 , tj.

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

jednakost vektora

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

duljina vektora

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \Rightarrow \left| \vec{a} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \Rightarrow \left| \vec{a} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

zbrajanje i oduzimanje vektora

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \cdot \vec{i} + (a_y + b_y) \cdot \vec{j} \\ \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \cdot \vec{i} + (a_y - b_y) \cdot \vec{j} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \cdot \vec{i} + (a_y + b_y) \cdot \vec{j} + (a_z + b_z) \cdot \vec{k} \\ \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \cdot \vec{i} + (a_y - b_y) \cdot \vec{j} + (a_z - b_z) \cdot \vec{k} \end{array} \right.$$

množenje skalara i vektora

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) = (\alpha \cdot a_x) \cdot \vec{i} + (\alpha \cdot a_y) \cdot \vec{j}$$

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) = (\alpha \cdot a_x) \cdot \vec{i} + (\alpha \cdot a_y) \cdot \vec{j} + (\alpha \cdot a_z) \cdot \vec{k}$$

jedinični vektor (ort)

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\left| \vec{a} \right|} = \frac{a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot \vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\left| \vec{a} \right|} = \frac{a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \cdot \vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \cdot \vec{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \cdot \vec{k}$$

skalarni produkt vektora

skalarni produkt vektora \vec{a} i \vec{b} , u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$ je broj (skalar) koji ovako definiramo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \cos \varphi, \text{ gdje je } \varphi \text{ kut između vektora } \vec{a} \text{ i } \vec{b}, \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

svojstva skalarnog produkta

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad , \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad , \quad (\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad , \quad \alpha \in R \quad , \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 > 0 \quad , \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad , \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad , \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \varphi < 90^\circ &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \\ 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \end{aligned} \right\}$$

skalarni produkt izražen pomoću koordinata vektora

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

uvjet okomitosti

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$$

tablica skalarnog množenja jediničnih vektora

\cdot	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

kut između vektora \vec{a} i \vec{b}

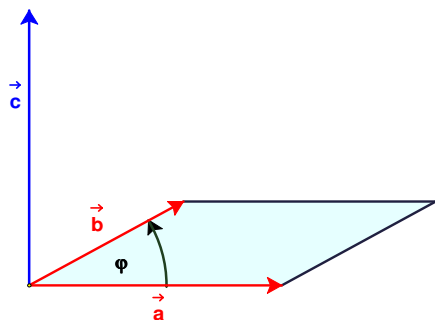
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

uvjet paralelnosti (usporednosti)

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \alpha \quad , \quad \alpha \in R$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

vektorski produkt vektora



vektorski produkt vektora \vec{a} i \vec{b} , u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, je vektor \vec{c} okomit na \vec{a} i \vec{b} , orijentacija od \vec{c} je dana pravilom desnog vijka, tj. dana je smislom napredovanja vijka pri njegovu zakretanju od prvog vektora prema drugom najkraćim putem u smjeru gibanja kazaljke sata

modul vektora \vec{c} jednak je površini paralelograma razapetog vektorima \vec{a} i \vec{b} :

$$\left| \vec{c} \right| = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi, \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

svojstva vektorskog produkta

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \cdot \vec{b}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|$$

površina paralelograma određenog vektorima \vec{a} i \vec{b}

$$P = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

tablica vektorskog množenja jediničnih vektora

\times	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	0	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	0	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	0

vektorski produkt izražen pomoću koordinata vektora

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

mješoviti produkt

mješoviti produkt vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} je skalar (broj) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ koji je brojčano jednak obujmu

paralelepipeda razapetog vektorima \vec{a} , \vec{b} i \vec{c}

mješoviti produkt je pozitivan ako \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} tvore desni sustav vektora, a negativan u protivnom slučaju

$$V = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right|$$

mješoviti produkt je jednak nuli ako:

- je jedan od vektora nul-vektor
- su dva bilo koja vektora kolinearna
- su vektori komplanarni (leže u jednoj ravnini ili su paralelni s istom ravninom)

svojstva mješovitog produkta

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \cdot \vec{b} \quad , \quad \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = - \left(\vec{b} \times \vec{a} \right) \cdot \vec{c}$$

$$\left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \cdot \vec{a} = - \left(\vec{c} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{a} \quad , \quad \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \cdot \vec{b} = - \left(\vec{a} \times \vec{c} \right) \cdot \vec{b}$$

$$\alpha \cdot \left(\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right) = \left(\alpha \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \left(\alpha \cdot \vec{c} \right) \quad , \quad \alpha \in R$$

$$\left(\left(\vec{a} + \vec{b} \right) \times \vec{c} \right) \cdot \vec{d} = \left(\vec{a} \times \vec{c} \right) \cdot \vec{d} + \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \cdot \vec{d}$$

mješoviti produkt u koordinatnom obliku

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \\ \vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

uvjet komplanarnosti tri vektora u koordinatnom obliku

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \\ \vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

obujam tetraedra konstruiranog nad vektorima \vec{a}, \vec{b} i \vec{c}

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|$$

dvostruki vektorski produkt

dvostruki vektorski produkt $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)$ je vektor komplanaran s vektorima \vec{b} i \vec{c} :

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$$

dvostruki vektorski produkt $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c}$ je vektor komplanaran s vektorima \vec{b} i \vec{a} :

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c} \right) \cdot \vec{a}$$

svojstva dvostrukog vektorskog produkta

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \times \vec{a} + \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \times \vec{b} = \vec{0} \quad (\text{Jacobijev identitet})$$