VAN AUBELOV TEOREM

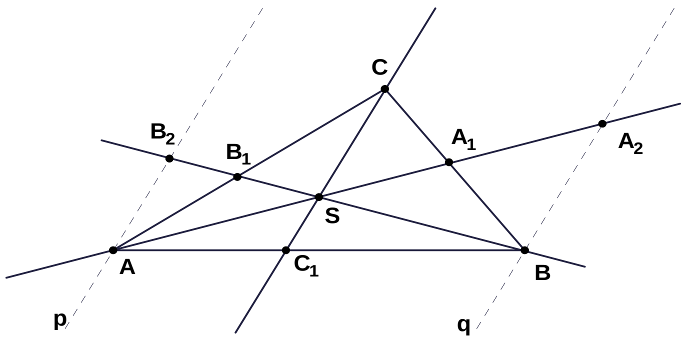
MLADEN HALAPA, Bjelovar

U članku je dokazan van Aubelov[1] teorem i dano je nekoliko njegovih primjena ilustriranih na primjerima.

Teorem. Točke A_1, B_1 i C_1 su na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}$ *i* $\overline{AB}$ trokuta *ABC*, tim redom, tako da se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u točki *S*. Tada je

$$\frac{|CS|}{|SC_1|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}+\frac{|CA_1|}{|A_1B|}. \qquad (*)$$

Dokaz. Kroz točke *A* i *B* povucimo pravce *p* i *q* paralelne s CC_1. Sjecišta pravaca AA_1i BB_1 s paralelama *q* i *p* označimo s A_2 i B_2, tim redom.



Iz sličnosti trokuta, dobivamo sljedeće relacije

$$\Delta CB_1S \sim \Delta AB_1B_2 \Rightarrow \frac{|CS|}{|AB_2|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}, \qquad (1)$$

$$\Delta CSA_1 \sim \Delta BA_2A_1 \Rightarrow \frac{|CS|}{|BA_2|}=\frac{|CA_1|}{|A_1B|}, \qquad (2)$$

$$\Delta C_1BS \sim \Delta ABB_2 \Rightarrow \frac{|SC_1|}{|AB_2|}=\frac{|C_1B|}{|AB|}, \qquad (3)$$

$$\Delta AC_1S \sim \Delta ABA_2 \Rightarrow \frac{|SC_1|}{|BA_2|}=\frac{|AC_1|}{|AB|}. \qquad (4)$$

Zbrajanjem jednakosti (1) i (2), te (3) i (4) dobijemo:

$$\frac{|CS|}{|AB_2|}+\frac{|CS|}{|BA_2|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}+\frac{|CA_1|}{|A_1B|}, \qquad (5)$$

[1] Van Aubel, belgijski matematičar, bio je krajem 19. st. u Antverpenu profesor matematike u gimnaziji.

$$\frac{|SC_1|}{|AB_2|}+\frac{|SC_1|}{|BA_2|}=\frac{|C_1B|}{|AB|}+\frac{|AC_1|}{|AB|}. \tag{6}$$

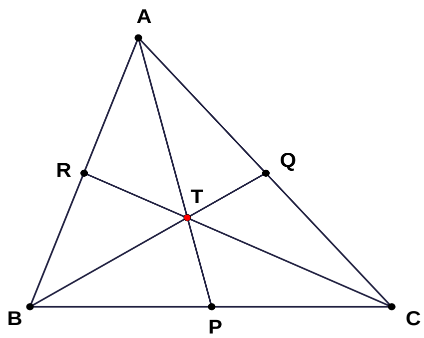
Sa slike se vidi da je

$$|AC_1| + |C_1B| = |AB|. \tag{7}$$

Podijelimo li (5) sa (6), uz pretpostavku (7), dobivamo danu jednakost (*).

Primjer 1. U svakom trokutu, težište T dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1, u odnosu na vrh trokuta.

Rješenje.



Neka su P, Q i R polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC.

Dokažimo postavljenu tvrdnju koristeći upravo dokazani teorem:

$$\frac{|AT|}{|TP|}=\frac{|AR|}{|RB|}+\frac{|AQ|}{|QC|}=1+1=2.$$

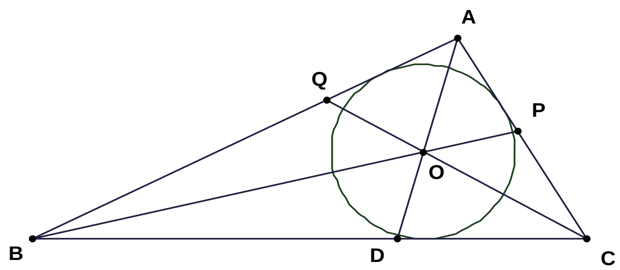
Analognim postupkom dokazuje se i za ostale težišnice.

Primjer 2. Ako je O središte upisane kružnice trokutu ABC, i D točka u kojoj pravac AO siječe stranicu $\overline{BC}$, onda je

$$\frac{|AO|}{|OD|}=\frac{|AB|+|AC|}{|BC|}.$$

Rješenje. Budući da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica, slijedi

$$\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AC|}{|BC|}, \quad \frac{|AP|}{|PC|}=\frac{|AB|}{|BC|}. \tag{8}$$



Primjenom dokazanog teorema dobivamo

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AQ|}{|QB|} + \frac{|AP|}{|PC|}, \tag{9}$$

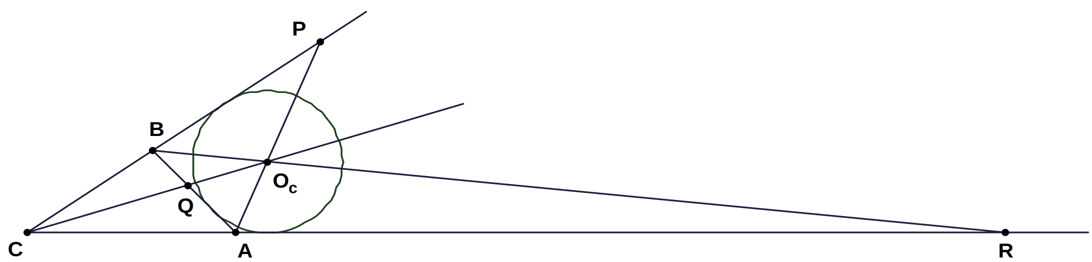
a uvrštavanjem (8) u (9) i traženu jednakost.

Primjer 3. Neka je O_c središte trokutu pripisane kružnice uz uvjet | AC | > | AB |. Sjecište pravaca AO_c i BC označimo s P. Tada vrijedi jednakost

$$\frac{|AO_c|}{|O_cP|} = \frac{|AC| - |AB|}{|BC|}.$$

Dokaz. Koristeći dokazani teorem, vidi se

$$\frac{|AO_c|}{|O_cP|} = \frac{|AQ|}{|QB|} - \frac{|AR|}{|RC|} \qquad \text{(zašto?).}$$



Iz trokuta BCR i BAR, koristeći teorem o simetrali unutarnjeg kuta, dobivamo

$$\frac{|CR|}{|BC|} = \frac{|RO_c|}{|BO_c|}, \quad \frac{|\mathrm{AR}|}{|AB|} = \frac{|RO_c|}{|BO_c|} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{|CR|}{|BC|} = \frac{|AR|}{|AB|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|\mathrm{AB}|}{|BC|} = \frac{|AR|}{|CR|}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{|AO_c|}{|O_cP|} = \frac{|AQ|}{|QB|} - \frac{|AR|}{|RC|} = \frac{|AC|}{|BC|} - \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC| - |AB|}{|BC|},$$

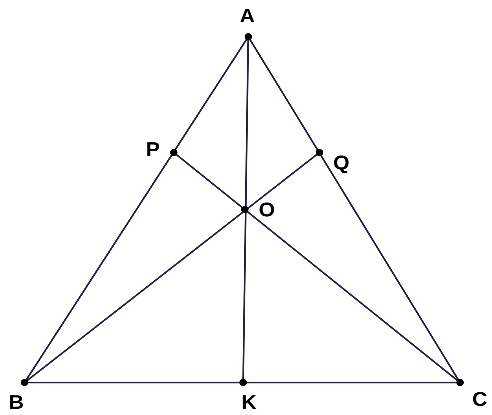
a to je tražena jednakost.

Primjer 4. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta *ABC* dane su točke *P* i *Q* tako da je

$$\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{|\mathrm{AQ}|}{|\mathrm{QC}|}=\frac{1}{2}.$$

Neka je *O* presjek pravaca *CP* i *BQ*, a *K* presjek pravaca *AO* i *BC*. Tada je | AO | = | OK |.

Rješenje.



Primjenom teorema, dobivamo

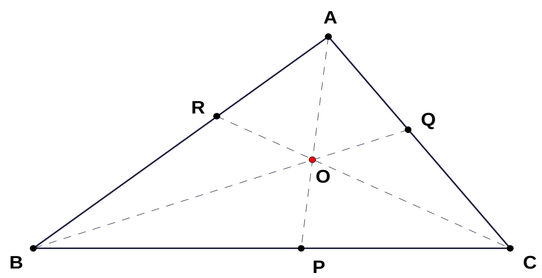
$$\frac{|AO|}{|OK|}=\frac{|AP|}{|PB|}+\frac{|AQ|}{|QC|}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

tj. | AO | = | OK |, što je i trebalo pokazati.

Primjer 5. U trokutu *ABC* simetrale unutarnjih kutova sijeku nasuprotne stranice u točkama *P*, *Q* i *R* (pri čemu je $P \in \overline{BC}$, $Q \in \overline{CA}$ i $R \in \overline{AB}$). Sjecište simetrala označimo s *O*. Ako je | AO | = 2 · | OP |, onda je duljina stranice $\overline{BC}$ aritmetička sredina duljina preostalih dviju stranica.

Rješenje.

Iz uvjeta | AO | = 2 · | OP | i teorema, slijedi:



$$\frac{|AO|}{|OP|} = \frac{|AR|}{|RB|} + \frac{|AQ|}{|QC|},$$

$$2 = \frac{|AC|}{|BC|} + \frac{|AB|}{|BC|},$$

odnosno,

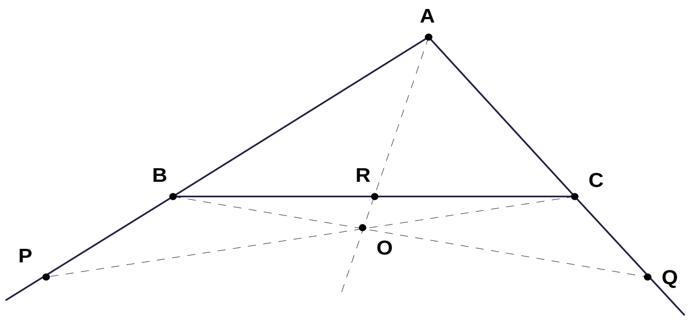
$$|BC| = \frac{|AB| + |AC|}{2}.$$

Primjer 6. Dan je trokut *ABC* i na pravcima *AB* i *AC* točke *P* i *Q* (*B* $\in \overline{AP}$ i *C* $\in \overline{AQ}$ tako da je

$$|\,\mathrm{AB}\,| = 2 \cdot |\,\mathrm{BP}\,| \;\text{ i }\; |\,\mathrm{AC}\,| = 2 \cdot |\,\mathrm{CQ}\,|. \tag{10}$$

Sjecište pravaca *BQ* i *CP* označimo s *O*, a sjecište pravaca *AO* i *BC* s *R*. Koliki je omjer $\frac{|AO|}{|OR|}$?

Rješenje. Gledaj sliku!



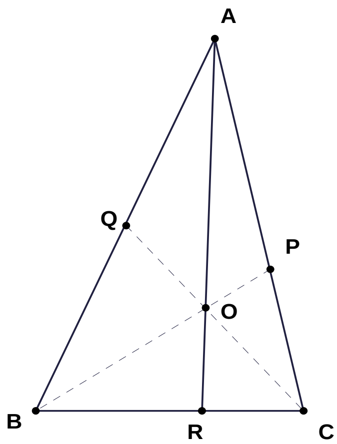
Iz uvjeta (10) i teorema slijedi

$$\frac{|AO|}{|OR|} = -\frac{|AP|}{|PB|} - \frac{|AQ|}{|QC|} = \left(zbog\;\;(10)\right) = -3 - 3 = -6.$$

Dakle, točka *O* izvana dijeli dužinu $\overline{AR}$ u danom omjeru.

Primjer 7. U trokutu *ABC* je | AB | = n · | BC |, $n \in \mathbf{R}^+$**.** Točke *P* i *O* su sjecišta simetrale <*ABC* i stranice $\overline{AC}$, odnosno težišnice $\overline{CQ}$. Pravac AO siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki *R*. Koliki je omjer $\frac{|AO|}{|OR|}$?

Rješenje.



Kako je | AB | = n · | BC |, iz teorema dobivamo jednakost

$$\frac{|AO|}{|OR|} = \frac{|AQ|}{|QB|} + \frac{|AP|}{|PC|} = 1 + \frac{|AB|}{|BC|} = 1 + n,$$

što je traženi omjer.

Možete li se sjetiti nekog zadatka koji ste jednom rješavali, a mogao bi se riješiti i pomoću van Aubelovog teorema? Pokušajte samo sastaviti neki primjer.