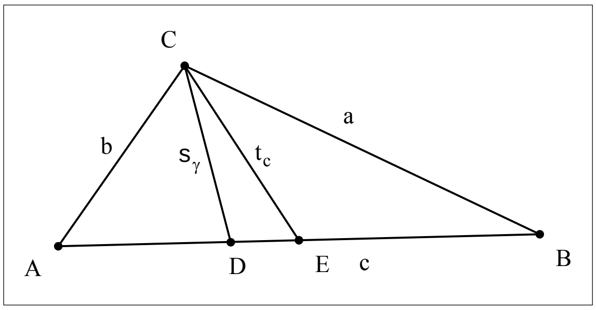
TEŽIŠNICA, SIMETRALA KUTA I PITAGORIN POUČAK

MLADEN HALAPA, BJELOVAR

Neka je zadan trokut ABC, gdje je t_c duljina težišnice $\overline{CE}$, c duljina stranice $\overline{AB}$, $s_\gamma = \overline{CD}$ duljina simetrale kuta <BCA.



Budući da duljina težišnice na stranicu c iznosi:

$$t_c = \frac{\sqrt{2\cdot\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{2}, \tag{1}$$

a duljina simetrale kuta γ je:

$$s_\gamma = \frac{\sqrt{a\cdot b\cdot(a+b)^2-c^2}}{a+b}, \tag{2}$$

pokažimo da vrijede sljedeći stavci:

STAVAK 1

Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u vrhu C, tj. vrijedi Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$, ako i samo ako je $2 \cdot t_c = c$.

DOKAZ 1

Zbog (1) možemo pisati niz relacija:

$$2\cdot t_c = c \iff 2\cdot\frac{\sqrt{2\cdot\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{2} = c \iff \sqrt{2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2} = c \iff$$

$$\iff 2a^2+2b^2 = 2c^2 \iff a^2+b^2=c^2.$$

STAVAK 2

Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u vrhu C, tj. vrijedi Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$, ako i samo ako je $s_\gamma = \frac{a\cdot b\cdot\sqrt{2}}{a+b}$.

DOKAZ 2

Zbog (2) slijede jednakosti:

$$s_\gamma = \frac{a\cdot b\cdot\sqrt{2}}{a+b} \iff \frac{\sqrt{a\cdot b\cdot(a+b)^2-c^2}}{a+b} = \frac{a\cdot b\cdot\sqrt{2}}{a+b} \iff \sqrt{a\cdot b\cdot\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-c^2\right)} = a\cdot b\cdot\sqrt{2} \iff$$

$$\iff ab(a^2+2ab+b^2-c^2) = 2a^2b^2 \iff a^2+2ab+b^2-c^2 = 2ab \iff a^2+b^2=c^2.$$