JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA JEDNADŽBI 4. STUPNJA

Milorad Tomić[1], Bjelovar

U ovome će tekstu biti prezentiran jedan način rješavanja algebarskih jednadžbi četvrtoga stupnja sa realnim koeficijentima. Algoritam je temeljen na jednakostima izračunavanja površine trokuta.

Neka je dana jednadžba 4. stupnja po t u obliku:

$$t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0.$$

Zamijeni li se t sa $x - \frac{A}{4}$, dobiva se jednadžba odlika:

(1) $$x^4 + p_1 x^2 + p_2 x + q = 0.$$

Nađimo rješenja ove jednadžbe primjenom poznatog iskaza za površinu trokuta pomoću potencija njegovih stranica.

Ako je trokut zadan duljinama stranica a, b i c, za njegovu površinu P vrijedi da je:

(2) $$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right) = 16P^2.$$

Uvedemo li zamjene

$$S = \frac{a+b+c}{2}, D = a^2 + b^2 + c^2,$$

nakon jednostavnog računa iz (2) dobivamo jednadžbu 4. stupnja:

(3) $$S^4 - \frac{D}{2} S^2 - abcS - P^2 = 0.$$

Vodeći računa o strukturi jednadžbe (1), stavimo da je $x = S$, $p_1 = -\frac{D}{2}$, $p_2 = -abc$, $q = -P^2$, njenim rješavanjem omogućujemo izračunavanje zbroja četvrtih potencija veličina a, b i c.

Jednadžbu 3. stupnja (čiji će korijeni biti kvadrati elemenata a, b i c) možemo sastaviti iz zbrojeva 2. i 4. stupnjeva te umnožaka tih elemenata. Sama rješenja jednadžbe (1) dobit ćemo pravilnim odabirom vrijednosti drugih korijena ovih rješenja.

Upotrebom Vièteovih formula zaključujemo da je zbroj rješenja jednadžbe (1) jednak 0. Uz supstituciju

$$x_1 = \frac{a+b+c}{2}, \text{ treba biti } x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a+b+c}{2}.$$

Pomoću Heronove formule $S(S-a)(S-b)(S-c) = P^2$ dobivamo jednakost

(4) $$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = -q.$$

Neka su S_1, S_2, S_3 i S_4 korijeni jednadžbe (3). Vrijedi da je $S_1 S_2 S_3 S_4 = q$, $S_2 + S_3 + S_4 = -\frac{a+b+c}{2}$.

Jednakost (4) pišemo u obliku:

(5) $$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-(b+c)}{2}\right)\left(\frac{b-(a+c)}{2}\right)\left(\frac{c-(a+b)}{2}\right) = q,$$

odnosno,

$$x_1 = \frac{a+b+c}{2}, \; x_2 = \frac{a-(b+c)}{2}, \; x_3 = \frac{b-(a+c)}{2}, \; x_4 = \frac{c-(a+b)}{2}.$$

---

[1]*Autor Milorad Tomić, dr.sc., profesor je matematike u Gimnaziji Bjelovar*

Napomenimo na ovome mjestu da je jednakost (2) za površinu trokuta – algebarska, odnosno da je istinita i za kompleksne brojeve.

Iz (4) slijedi da je:

(7) $$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=-16q\,,$$

odnosno:

$$\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)=-16q$$
$$2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=-16q$$
$$\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)=-16q$$
$$\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(a^4+b^4+c^4\right)=-16q\,.$$

Iz ovih jednakosti dobiju se sljedeće dvije:

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}-8q$$
$$\frac{a^4+b^4+c^4}{2}=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2+4q\,,$$

koje daju važan izraz za jedan od koeficijenata jednadžbe koju ćemo uskoro uvesti.

(6) $$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2-4q=p_1{}^2-4q\,.$$

Ove jednakosti omogućavaju nam postavljanje jednadžbe 3. stupnja čiji će korijeni biti kvadrati elemenata *a*, *b* i *c*. Označimo stranice trokuta *a*, *b* i *c* u općem slučaju sa $u_i, i=1,2,3$. Dakle, korijeni buduće jednadžbe biti će $u_1{}^2, u_2{}^2, u_3{}^2$.

Ukoliko je potpuna jednadžba 3. stupnja jednaka:

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\,,$$

a $x_i, i=1,2,3$ njezina rješenja, za koeficijente α,β i γ vrijedi:

$$\alpha=-(x_1+x_2+x_3),\quad \beta=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\quad \gamma=-x_1x_2x_3\,.$$

Ako je nadalje

$$x^4+p_1{}^2+p_2x+q=0,\quad x=\frac{u_1+u_2+u_3}{2}\,,$$

vrijedi

$$-2p_1=u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2,\quad -p_2=u_1u_2u_3,\quad p_1{}^2-4q=u_1{}^2u_2{}^2+u_1{}^2u_3{}^2+u_2{}^2u_3{}^2\,.$$

Sljedbeno tome, pomoću koeficijenata jednadžbe (1) sastavljamo ovu jednadžbu 6. stupnja po varijabli *U*:

(7) $$U^6+2p_1U^4+\left(p_1{}^2-4q\right)U^2-p_2{}^2=0\,.$$

Uz zamjenu $U^2=v$, dobivamo odgovarajuću jednadžbu 3. stupnja i njezina rješenja v_1, v_2 i v_3. Kako je $U_i=\pm\sqrt{u_i}$, i = 1,2,3, treba objasniti kako ćemo odabrati samo tri vrijednosti rješenja jednadžbe (7), bolje rečeno – njihove predznake.

Neka su tri odabrana korijena jednadžbe u_1, u_2, u_3. Pošto vrijedi da je $-p_2=u_1u_2u_3$, imamo sljedeća dva slučaja:

(i) $\quad -p_2 > 0 \Rightarrow$ za bar jedan od u_i, $i = 1,2,3$ (npr. u_1) mora biti $u_i > 0$,

(ii) $\quad -p_2 < 0 \Rightarrow$ za bar jedan od u_i, $i = 1,2,3$ (npr. u_1) mora biti $u_i < 0$.

Napomenimo da druge dvije vrijednosti, npr. u_2 i u_3 mogu biti ili obje pozitivne ili obje negativne, a da se predznak od $-p_2$ neće promijeniti. Budući da je

$$-p_1 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)/2,$$

njegov je predznak irelevantan obzirom na izbor predznaka od u_2 i u_3.

Odgovorimo sada na pitanje da li za umnožak korijena jednadžbe možemo uzeti bilo koje (međusobno jednake) predznake od u_2 i u_3? Kako je:

$$u_1 u_2 = \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{2}\right)\left(\frac{u_1 - (u_2 + u_3)}{2}\right),$$

odabir predznaka " +" za oba rješenja u_2 i u_3 ili " – " za ta rješenja daju isti umnožak, uz nebitnu zamjenu redoslijeda faktora. Nadalje,

$$u_3 u_4 = \left(\frac{u_2 - (u_1 + u_3)}{2}\right)\left(\frac{u_3 - (u_1 + u_2)}{2}\right),$$

pa i u ovome slučaju vrijedi ista konstatacija.

Zaključimo dakle da ni na umnožak korijena ne utječe odabir (međusobno jednakih) predznaka od u_2 i u_3.

Uzmimo stoga, ne umanjujući općenitost, da su veličine $-p_2, u_1, u_2, u_3$ ili sve pozitivne ili sve negativne. Dakle,

$$sign(p_2) = -sign(u_i), \quad i = 1,2,3.$$

Zaključimo: ako jednadžbi (1) četvrtog stupnja pridružimo jednadžbu (7) šestoga stupnja, iz svakog od tri para rješenja jednadžbe (7) tipa (-r, r) odabiremo po pojedan korijen u_1, u_2 i u_3 i to tako da mu predznak bude suprotan predznaku koeficijenta p_2. Ukoliko je pak $p_2 = 0$, imamo bikvadratnu jednadžbu pa u tom slučaju odabiremo potpuno ravnopravno ili U_1, U_3 i U_5 ili U_2, U_4 i U_6.

Uvažavajući prezentirane činjenice, rješenja jednadžne (1) dobivamo u obliku:

$$(8)\quad x_1 = \frac{u_1 + (u_2 + u_3)}{2},\ x_2 = \frac{u_1 - (u_2 + u_3)}{2},\ x_3 = \frac{u_2 - (u_1 + u_3)}{2},\ x_4 = \frac{u_3 - (u_1 + u_2)}{2}.$$

Na kraju ovoga članka riješimo dva konkretna primjera.

Primjer 1. Nađite rješenja jednadžbe: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

U ovome slučaju imamo bikvadratnu jednadžbu koju možemo riješiti i na standardni (lakši) način. Ipak provjerimo istinitost izrečenih postavki i za rješavanje ovoga tipa jednadžbi!

Pripadna jednadžba 6. stupnja je:

$$U^6 + 4U^4 + 16U^2 = 0,$$

a njezina su rješenja: $U_{1,2} = 0,\ \ U_{3,4} = \pm\left(1 + \sqrt{3}\, i\right),\ \ U_{5,6} = \pm\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)$. U ovome slučaju ($p_2 = 0$) odabiremo bilo koju kombinaciju parova rješenja. Uzmemo li da je

$$u_1 = 0,\ \ u_2 = -1 - \sqrt{3}\, i,\ \ u_3 = -1 + \sqrt{3}\, i,$$

iz relacije (8) dobivamo rješenja početne jednadžbe:

$$x_1 = -1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = -\sqrt{3}\, i,\ \ x_4 = \sqrt{3}\, i.$$

Primjer 2. Nađi rješenja jednadžbe: $x^4 - 2x^2 + 16x - 15 = 0$.

Pripadna jednadžba 6. stupnja ima oblik:

$$U^6 - 4U^4 + 64U^2 - 256 = 0.$$

Rješavanjem ove jednadžbe (npr. faktorizacijom) dobivamo da je $U_{1,2} = \pm 2$, $U_{3,4} = \pm(2 + 2i)$, $U_{5,6} = \pm(2 - 2i)$. Pošto je $sign(p_2) = 1$ vrijedi da je $sign(u_i) = -1$, $i = 1,2,3$, pa je

$$u_1 = -2, \quad u_2 = -2 - 2i, \quad u_3 = -2 + 2i.$$

Rješenja početne jednadžbe 4. stupnja proizlaze iz (8):

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1 - 2i, \quad x_4 = 1 + 2i.$$