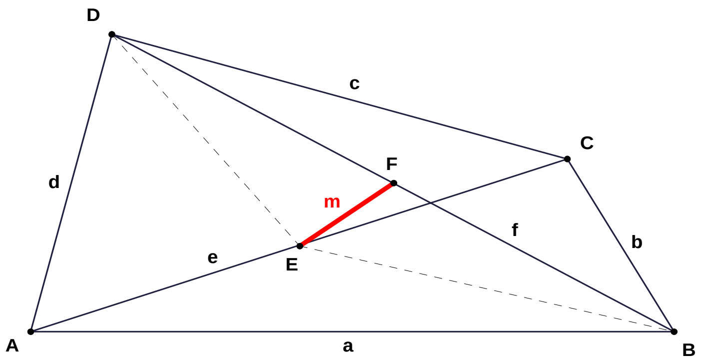
VEZA IZMEĐU STRANICA I DIJAGONALA ČETVEROKUTA

Mladen Halapa, *Bjelovar*

Promatrajmo konveksan četverokut *ABCD*. Točke *E* i *F* su polovišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, tj.

$$|AE| = \frac{1}{2}|AC|, \quad |BF| = \frac{1}{2}|BD| .$$



Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, $|AC| = e$, $|BD| = f$, $|EF| = m$.

Sada možemo izreći sljedeći

Teorem. U svakom konveksnom četverokutu je zbroj kvadrata duljina stranica jednak zbroju kvadrata duljina njegovih dijagonala uvećanom za četverostruki kvadrat duljine odsječka koji spaja polovišta dijagonala, tj.

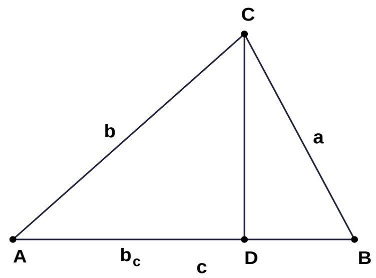
$$\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2.}$$

Za dokaz ovog teorema trebat će nam dvije pomoćne tvrdnje.

Lema 1. Kvadrat duljine stranice trokuta, koja leži nasuprot šiljastom (tupom) kutu, jednak je zbroju kvadrata duljina ostalih dviju stranica umanjenom (uvećanom) za dvostruki produkt duljine jedne od tih dviju stranica i okomite projekcije druge stranice na nju.

(Prepoznajete li poučak o kosinusu?)

Dokaz. Neka je $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|CD| = v$, $|AD| = b_c$.



Na pravokutne trokute *ADC* i *DBC* primijenimo Pitagorin poučak:

$$v^2 = b^2 - b_c^2, \qquad (1)$$

$$v^2 = a^2 - (c - b_c)^2 \qquad (2)$$

Odavde se dobije

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c.$$

Uvjerite se sami, ako je $\sphericalangle CAB$ tup, formula je oblika

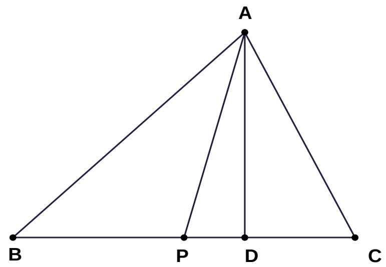
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cb_c.$$

Lema 2. Ako je u trokutu ABC, $\overline{AP}$ težišnica i $\overline{AD}$ visina na nasuprotnu stranicu $\overline{BC}$, onda je

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2\left(|AP|^2 + |BP|^2\right).$$

Dokaz. Promatrajmo trokut *ABC*. Sa slike se vidi da je

$$|BP| = |PC| = \frac{1}{2}|BC|. \qquad (3)$$



Na trokut *PCA* primijenimo lemu 1:

$$|AC|^2 = |AP|^2 + |PC|^2 - 2\cdot|PC|\cdot|PD|. \qquad (4)$$

Analogno zaključivanje za trokut *BPA* daje

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2 + 2\cdot|BP|\cdot|PD|. \qquad (5)$$

Zbrojimo (4) i (5) pa se iz (3) dobije

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2\left(|AP|^2 + |BP|^2\right).$$

Sada ćemo dokazati teorem koji je bio izrečen na početku. Promatrajmo sl. 1 i uočimo trokut ABC. Na njemu primijenimo lemu 2:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 2\left(|BE|^2 + |AE|^2\right). \qquad (6)$$

Ista lema primijenjena na trokut *DAC* daje

$$|DA|^2 + |DC|^2 = 2\left(|DE|^2 + |AE|^2\right). \qquad (7)$$

Zbrajanjem (6) i (7) dobivamo

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2=2\left(|BE|^2+|DE|^2+2|AE|^2\right). \quad (8)$$

U trokutu BDE ponovo koristimo lemu 2 i dobivamo

$$|BE|^2+|DE|^2=2\left(|EF|^2+|BF|^2\right). \quad (9)$$

Ako se relacija (9) stavi u (8) dobiva se

$$\begin{aligned}|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2&=4|AE|^2+2\left(|BE|^2+|DE|^2\right)\\&=4\left(\frac{1}{2}|AC|\right)^2+2\left(2\left(|EF|^2+|BF|^2\right)\right)\\&=|AC|^2+4\left(|EF|^2+\left(\frac{1}{2}|BD|\right)^2\right)\\&=|AC|^2+|BD|^2+4|EF|^2.\end{aligned}$$

ili

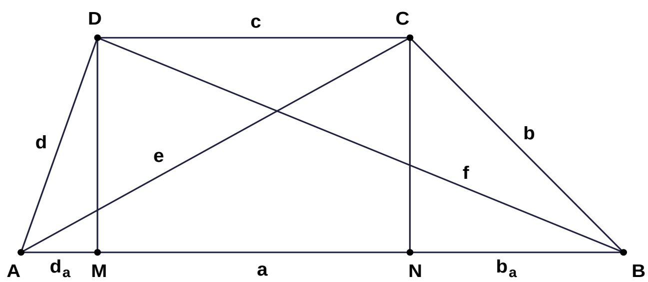
$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4m^2.$$

Promatrajmo sada neke posebne slučajeve.

a) Za trapez dobivamo

$$b^2+d^2+2ac=e^2+f^2.$$

Provjerimo ovu formulu!



Iz točaka *D* i *C* povucimo okomice na *AB* i neka je

$$|AM|=d_a, \quad |NB|=b_a .$$

Jer je $a = d_a + c + b_a$, slijedi

$$b_a+d_a=a-c. \quad (10)$$

Za trokut *ABC* lema 1 daje

$$e^2=a^2+b^2-2ab_a , \quad (11)$$

a za trokut ABD je

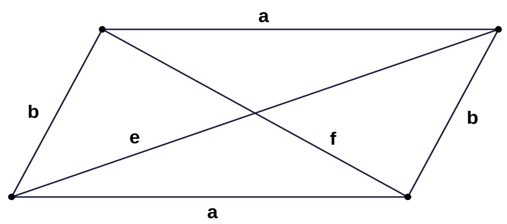
$$f^2=a^2+d^2-2ad_a . \quad (12)$$

Zbrajanjem (11) i (12) dobivamo

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 - 2a(b_a + d_a) = \text{zbog (10)}$$
$$= 2a^2 + b^2 + d^2 - 2a(a - c)$$
$$= b^2 + d^2 + 2ac.$$

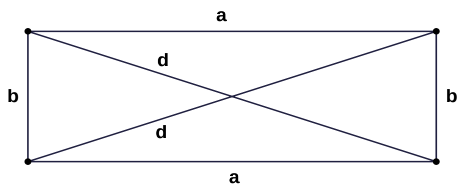
b) Za paralelogram je

$$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2.$$



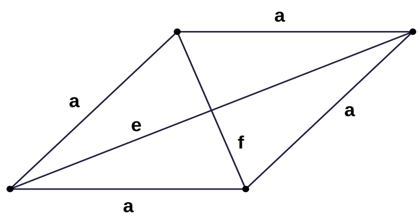
c) Za pravokutnik je

$$2(a^2 + b^2) = 2d^2.$$



d) Za romb je

$$4a^2 = e^2 + f^2.$$



e) Za kvadrat je

$$4a^2 = 2d^2.$$