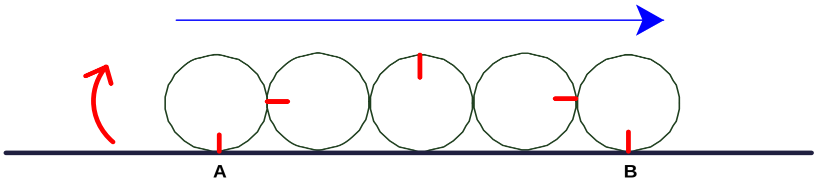
REKTIFIKACIJA KRUŽNICE

Mladen Halapa, *Bjelovar*

U matematičkoj terminologiji pojam *rektifikacije*[1] općenito znači izračunavanje duljine krivulje ili njezina luka. Specijalno se pod nazivom *rektifikacija kružnice* podrazumijeva konstrukcija dužine čija je duljina jednaka opsegu kruga. Zadana kružnica može se rektificirati ("razmotati u dužinu") tako da nacrtamo dužinu koja je π puta veća od promjera te kružnice.



Slika 1.

Napravi li krug polumjera r jedan puni okret bez klizanja po pravcu, pomaknut će se za duljinu $|AB|$. Kažemo da je dužina $\overline{AB}$ rektificirana kružnica i pišemo

$$|AB| = O = 2r\pi \,.$$

Dakle, problem je kako nacrtati dužinu duljine π . Budući da je π *transcedentan*[2] broj, konstrukcija nije moguća ako se služimo samo ravnalom i šestarom. Stoga postoje mnogobrojne približne konstrukcije. U ovom članku spomenut ćemo tri najpoznatije i usporediti njihove točnosti. Vrlo su jednostavne i dobro aproksimiraju broj π.

I. konstrukcija

Poljski matematičar *A. Kohansky* pronašao je ovaj postupak:

Nacrtamo kružnicu polumjera r i njezin promjer $\overline{AB}$. U točki B povučemo tangentu t na kružnicu. Točku C dobijemo iz uvjeta

$$\angle CSB = 30^\circ \,.$$

Točku D na tangenti odredimo tako da bude

$$|CD| = 3r.$$

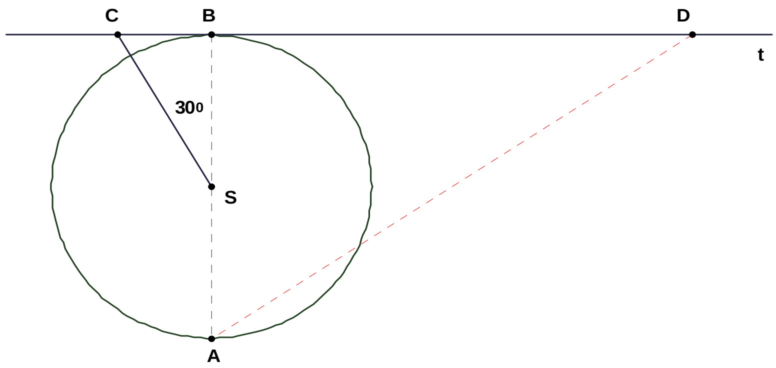
Konstruiramo dužinu $\overline{AD}$. Tada je

$$|AD| \approx \pi r.$$

---

[1] lat. *rectificare* – učiniti ravnim

[2] Realan broj nazivamo algebarskim ako je korijen neke algebarske jednadžbe $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ kojoj su koeficijenti cijeli brojevi. Realan broj koji nije algebarski nazivamo *transcedentnim.*



Slika 2.

Dokaz. Sa slike je vidljivo

$$|SB| = r, \quad |AB| = 2r, \quad |CD| = 3r.$$

Iz pravokutnog trokuta *SBC* je

$$tg30° = \frac{|CB|}{|SB|}, \qquad \text{tj.} \quad |CB| = \frac{\sqrt{3}}{3}r,$$

pa je zato

$$|BD| = |CD| - |CB| = \frac{9-\sqrt{3}}{3}r.$$

Pravokutni trokut *ADB* daje traženu relaciju:

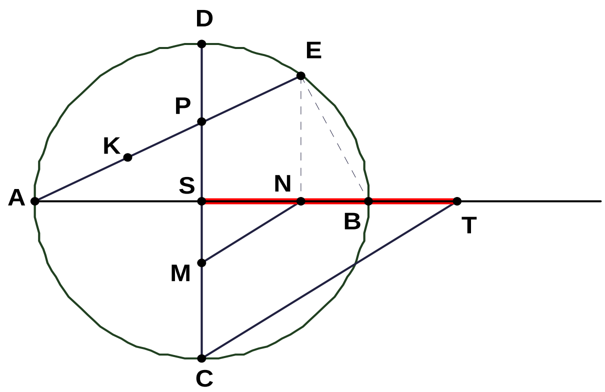
$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 = \frac{120-18\sqrt{3}}{9}r^2,$$

tj.

$$|AD| = \frac{\sqrt{120-18\sqrt{3}}}{3}r = 3.14153 \approx \pi r.$$

II. konstrukcija

Francuski matematičar *F. Viète* predložio je ovo rješenje:



Slika 3.

Zadana su dva okomita promjera $\overline{AB}$ *i* $\overline{CD}$. Točka *P* raspolavlja dužinu $\overline{SD}$. Neka pravac *AP* siječe kružnicu u točki *E*. Iz *E* povučemo okomicu na $\overline{SB}$. Njezino je nožište točka *N*. Točku *K* nađemo tako da je

$$| SP | = | PK |.$$

Točka *M* dobije se iz uvjeta

$$| AK | = | CM |. \qquad (1)$$

Točku *T* odredimo iz zahtjeva

$$MN \parallel CT.$$

Tada je

$$2 \cdot | ST | \approx \pi r.$$

Dokaz. Zbog danih pretpostavki imamo

$$|AS| = r, \ |SP| = |PK| = \frac{1}{2}r.$$

Primijenimo Pitagorin poučak na pravokutni trokut *ASP*:

$$| AP |^2 = | AS |^2 + | SP |^2, \quad \text{tj.} \quad | AP | = \frac{\sqrt{5}}{2}r.$$

Duljina dužine $\overline{AK}$ dobije se iz relacije

$$| AK | = | AP | - | PK | = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$$

Zbog (1) je

$$| CM | = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$$

Iz sličnosti trokuta ABE i APS dobivamo omjer

$$\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{|AS|}{|AP|}, \tag{2}$$

a iz sličnosti trokuta ANE i ASP

$$\frac{|AN|}{|AE|}=\frac{|AS|}{|AP|}. \tag{3}$$

Iz jednakosti (2) i (3) dobivamo

$$|AN|=|AB|\cdot\left(\frac{|AS|}{|AP|}\right)^2, \qquad \text{tj.} \quad |\mathrm{AN}|=\frac{8}{5}r.$$

Iz slike je očigledno

$$|SN|=|AN|-|AS|=\frac{3}{5}r, \qquad |\mathrm{SM}|=|SC|-|CM|=\frac{3-\sqrt{5}}{2}r.$$

Koristeći sličnost trokuta SMN i SCT dobivamo omjer

$$\frac{|ST|}{|SC|}=\frac{|SN|}{|SM|}, \qquad |\mathrm{ST}|=\frac{3}{10}\left(\sqrt{5}+3\right)\, r,$$

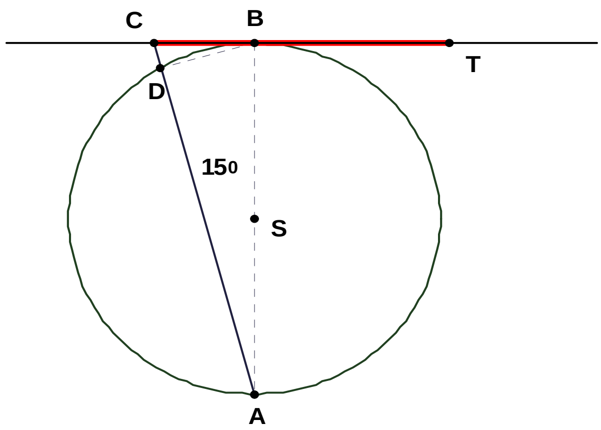
odnosno

$$2\cdot|ST|=\frac{3}{5}\left(\sqrt{5}+3\right)\ \mathrm{r}=3.14164\approx\pi\mathrm{r}.$$

III. konstrukcija

Nacrtamo kružnicu polumjera *r* i njezin promjer $\overline{AB}$. U točki *B* povučemo tangentu na kružnicu, a točku *C* na tangenti odredimo iz uvjeta *<BAC = 15°*. Pravac *AC* siječe kružnicu u točki *D*. Točku *T* na tangenti dobijemo iz uvjeta

$$|\mathrm{BT}| = 2\cdot|\mathrm{BD}|. \tag{4}$$



Slika 4.

Tada je

$$2 \cdot |CT| \approx \pi r.$$

Dokaz. Koristit ćemo ove relacije iz trigonometrije:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Tada je

$$\sin 15° = \sin\left(45° - 30°\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Za promjer kružnice vrijedi $|AB| = 2r$. Trokut *ABD* je pravokutan (Talesov poučak), pa možemo pisati

$$\sin 15° = \frac{|BD|}{|AB|}, \quad \text{tj.} \quad |BD| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,r. \qquad (5)$$

Budući da su $<CBD$ i $<CAB$ kutovi s okomitim kracima, vrijedi jednakost

$$<CBD = <CAB = 15°.$$

U pravokutnom trokutu *CBD* je

$$\cos 15° = \frac{|BD|}{|CB|}, \quad \text{tj.} \quad |CB| = 2\left(2 - \sqrt{3}\right) r. \qquad (6)$$

Sada je

$$|CT| = |CB| + |BT| = (\text{zbog}(4)) = |CB| + 2 \cdot |BD|$$

$$= (\text{zbog}(5) \text{ i } (6)) = 2\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}\right) r.$$

Konačno,

$$2 \cdot |CT| = 4\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}\right) r = 3.14235\, r \approx \pi r.$$

Mjeru točnosti ocijenit ćemo pomoću relativnih pogrešaka. Zaokružimo sve dobivene vrijednosti na pet decimala.

Vrijednost zaokružena na pet decimala	$a = 3.14159$	$p = 3.14153$	$d = 3.14164$	$t = 3.14235$
Relativne pogreške konstrukcija				
I. konstrukcija	$\delta(\%) = \left\lvert \frac{p-a}{a} \right\rvert \cdot 100\% \approx 0.00191\%$			
II. konstrukcija	$\delta(\%) = \left\lvert \frac{d-a}{a} \right\rvert \cdot 100\% \approx 0.00159\%$			
III. konstrukcija	$\delta(\%) = \left\lvert \frac{t-a}{a} \right\rvert \cdot 100\% \approx 0.02419\%$			

Relativne pogreške pokazuju da je druga konstrukcija točnija od ostalih. Prednost prve je u njezinoj jednostavnosti.