PRETOČITI, A SEBE NE SMOČITI?

MLADEN HALAPA, *Bjelovar*

Gotovo svaka knjiga ili zbirka zadataka *zabavne matematike*[1] sadrži zadatke o prelijevanju tekućine iz jedne posude u drugu. Dvije nam zgodne dosjetke pomažu pri rješavanju takvih problema. Kako je rješavanje zapravo igra, pokušajte sami doći do odgovora. Na svoj ćete originalni način vjerojatno pronaći kraći i jednostavniji put do konačnog rezultata.

Zadatak 1. Možemo li dvama loncima, obujma 10 litara i 6 litara izmjeriti 2 litre vode?

Rješenje. U rješavanju će nam pomoći neke činjenice vezane uz teoriju brojeva. *Najveći zajednički djelitelj (mjera) prirodnih brojeva a i b, u oznaci* nzd(a, b)*, najveći je broj kojim su djeljivi zadani brojevi.*

Primjerice, nzd(12,18) = 6 jer je $12 = 6 \cdot 2$ i $18 = 6 \cdot 3$.

Za prirodne brojeve a i b, $a > b$, uvijek postoje brojevi q (količnik) i r (ostatak), tako da vrijedi da je $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$.

Pretpostavimo da je $r \neq 0$. Budući da je $b > r$, postoje brojevi q_1 i r_1 za koje je $b = r \cdot q_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < r$.

Ako je $r_1 > 0$, opet postoje brojevi q_2 i r_2 za koje vrijedi da je $r = r_1 \cdot q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$.

Nastavimo li ovaj postupak, on će sigurno završiti nakon konačno mnogo koraka, tj. dobit ćemo ostatak jednak nuli. Ako je u našem slučaju $r_3 = 0$, cijeli postupak izgleda ovako:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q + r, && 0 < r < b \\ b &= r \cdot q_1 + r_1, && 0 < r_1 < r \\ r &= r_1 \cdot q_2 + r_2, && 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + 0, && r_3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(Ovaj postupak nazivamo *Euklidov algoritam)*

[1] *Matematika je toliko ozbiljna pa ne treba propustiti nijednu prigodu da se učini zanimljivijom.* To je napisao francuski matematičar **Blaise Pascal** (1623. – 1662.

Najveći zajednički djelitelj jednak je najmanjem ostatku različitom od nule.

Dakle, nzd(a, b) = r_2. *On se uvijek može izraziti pomoću brojeva a i b:*

$$\text{nzd}(a, b) = x \cdot a + y \cdot b,$$

pri čemu su x, y cijeli brojevi.

Za (1) to izgleda ovako:

$\text{nzd}(a, b) = r_2 = r - r_1 \cdot q_2 = r - (b - r \cdot q_1) \cdot q_2 = r - b \cdot q_2 + r \cdot q_1 \cdot q_2 = r \cdot (1 + q_1 \cdot q_2) - b \cdot q_2 =$
$= (a - b \cdot q) \cdot (1 + q_1 \cdot q_2) - b \cdot q_2 = (1 + q_1 \cdot q_2) \cdot a + (-q - q_2 - q \cdot q_1 \cdot q_2) \cdot b = x \cdot a + y \cdot b,$
pa je

$$x = 1 + q_1 \cdot q_2, \quad y = -q - q_2 - q \cdot q_1 \cdot q_2.$$

U našem zadatku lonci imaju obujam od 10 i 6 litara. Potražimo najveći zajednički djelitelj brojeva 10 i 6.

$$10 = 6 \cdot 1 + 4$$

$$6 = 4 \cdot 1 + 2$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0,$$

pa je nzd(10, 6) = 2.

Izrazimo li broj 2 kao kombinaciju brojeva 10 i 6, dobit ćemo da je:

$$2 = 6 - 4 \cdot 1 = 6 - (10 - 6 \cdot 1) \cdot 1 = -1 \cdot 10 + 2 \cdot 6.$$

Usporedimo jednakosti $2 = -1 \cdot 10 + 2 \cdot 6$ i $\text{nzd}(a, b) = x \cdot a + y \cdot b$.

Broj $x > 0$ je broj ulijevanja, a $x < 0$ broj izlijevanja loncem od a litara. Broj $y > 0$ je broj ulijevanja, a $y < 0$ broj izlijevanja loncem od b litara. Dakle, ulijevat ćemo dva puta loncem od 6 litara, a odlijevati jednom loncem obujma 10 litara.

Da bismo istim loncima dobili 4 litre, radimo ovako:

$$2 = -1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \; / \cdot 2 \;\; \Rightarrow \;\; 4 = -2 \cdot 10 + 4 \cdot 6.$$

Dakle, četiri puta moramo uliti manjim loncem, a većim odlijevati dvaput. Pokušajte naći jednostavnije rješenje!

Kako biste istim loncima (od 10 i 6 litara) izmjerili

$6, 8, 10, 12, 14, \ldots, (2n); \quad n \in \mathbb{N}$ litara vode?

Pokažite da takvim loncima ne možete dobiti

$7, 9, 11, 13, \ldots, (2n + 1); \; n \in \mathbb{N}$ litara vode.

Zadatak 2. Koje se količine tekućine mogu izmjeriti dvjema čašama obujma 5 dl i 3 dl?

Rješenje. Budući da je

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$2 = 1 \cdot 2 + 0,$$

zaključujemo da je nzd(5, 3) = 1. Nadalje je

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3.$$

Dakle, $1 = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3$, a to znači da je tim čašama moguće izmjeriti

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n;\ n \in \mathrm{N}$$

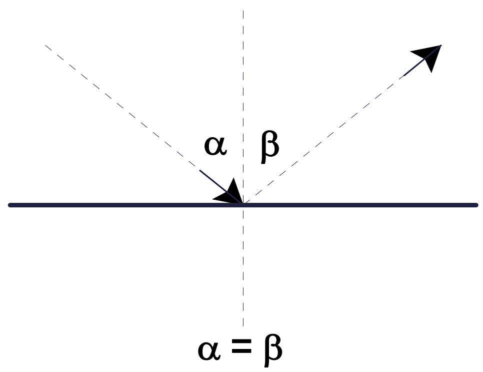
decilitara tekućine. Provjerite!

Zadatak 3. Koje se količine tekućine mogu, a koje ne mogu izmjeriti dvama vrčevima obujma 9 dl i 6 dl?

Rješenje. Uvjerite se da je tim vrčevima moguće izmjeriti svaku količinu tekućine djeljivu s 3.

Zadatak 4. Dvjema praznim bocama obujma 9 litara i 5 litara odlite litru vode iz pune 12 – litarske bačvice.

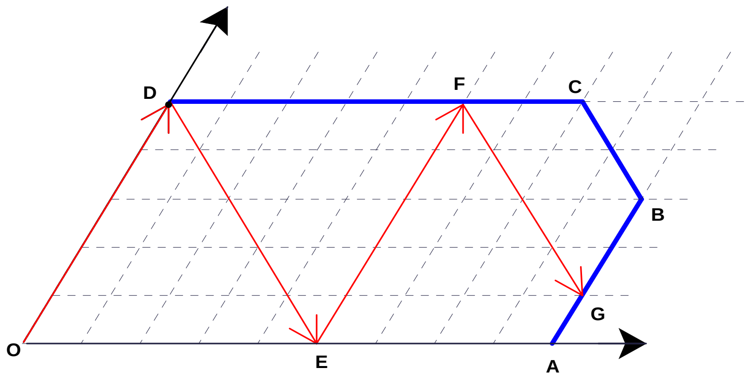
Rješenje. Pri rješavanju rabimo kosokutni koordinatni sustav te zakon odbijanja (zakon refleksije). Zakon odbijanja svjetlosti glasi: Z*raka svjetlosti koja upada i zraka koja se odbija od neke plohe leže u istoj ravnini koja je okomita na plohu, a kut upada zrake α jednak je kutu odbijanja* β (v.sl.1).



Slika 1.

Ako se loptica za tenis, bilijarska kugla ili staklena kuglica gibaju po podu, odbit će se od zida tako da će upadni kut biti jednak kutu odbijanja.

Nacrtajmo kosokutni koordinatni sustav čije osi zatvaraju kut od 60°. Obujam veće boce označimo s x (x = 9) i prikažimo ga na x–osi točkom A. Dakle, A(x, 0) = A(9, 0) (v.sl.2).



Slika 2.

Slično, obujam manje posude označimo sa y (y = 5) te ga prikažimo na y–osi točkom D, D(0, y) = D(0, 5). Tada točke O, B i C imaju koordinate: O(0, 0), B(x, 12 – x) = B(9, 3) i C(12 – y, y) = C(7, 5).

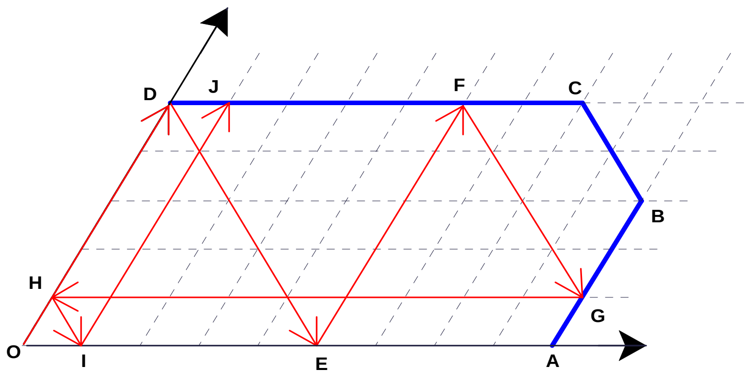
Dobili smo mnogokut OABCD. Pustimo zraku svjetlosti (ili, što je isto, zakotrljajmo kuglu) duž stranice $\overline{OD}$. U točki D(0, 5) (što znači da je veća boca prazna, u manjoj je 5 litara vode, a u bačvici preostalih 7 litara) zraka se odbije od stranice $\overline{DC}$ i po pravilu refleksije dolazi do točke E(5, 0) (gdje je u većoj boci 5 litara, manja je prazna, a u bačvici je 7 litara). Zraka se opet reflektira od $\overline{OA}$ i pada u F(5, 5), što znači da je u svakoj boci po 5 litara, a 2 litre vode su u bačvici. Odbijanjem na stranici $\overline{DC}$ zraka pogađa točku G(9, 1). Dobili smo, dakle, litru vode u manjoj boci pa je zadatak riješen. Cjelokupni postupak pretakanja prikažimo u tablici:

Redni broj prelijevanja	9 l x	5 l y	12 l Ostatak u bačvici	Točka
I.	0	5	7	D(0, 5)
II.	5	0	7	E(5, 0)
III.	5	5	2	F(5, 5)
IV.	9	1	2	G(9, 1)

Zadatak 5. Praznim kantama obujma 9 litara i 5 litara odlijte 6 litara vina iz pune

12–litarske bačvice**.**

Rješenje. Točke koje određuju mnogokut OABCD imaju koordinate: O(0, 0), A(9, 0), B(9, 3), C(7, 5) i D(0, 5). Duž stranice $\overline{OD}$. pustimo opet zraku svjetlosti i pratimo njezino gibanje sve dok ne dobijemo rezultat 6 litara (v. sl.3.).



Slika 3.

Rezultat prikažimo i u tablici:

Redni broj prelijevanja	9 l x	5 l y	12 l Ostatak u bačvici	Točka
I.	0	5	7	D(0, 5)
II.	5	0	7	E(5, 0)
III.	5	5	2	F(5, 5)
IV.	9	1	2	G(9, 1)
V.	0	1	11	H(0, 1)
VI.	1	0	11	I(1, 0)
VII.	1	5	6	J(1, 5)

Kako možemo doći do rješenja da je zraka svjetlosti usmjerena po pravcu OA? Pokušajte odrediti kamo se vraća zraka u slučaju da problem nema rješenja?

Zadatak 6. Provjerite koje se količine mlijeka mogu natočiti dvjema praznim šalicama obujma 7 dl i 9 dl iz punog lončića obujma 12 dl.