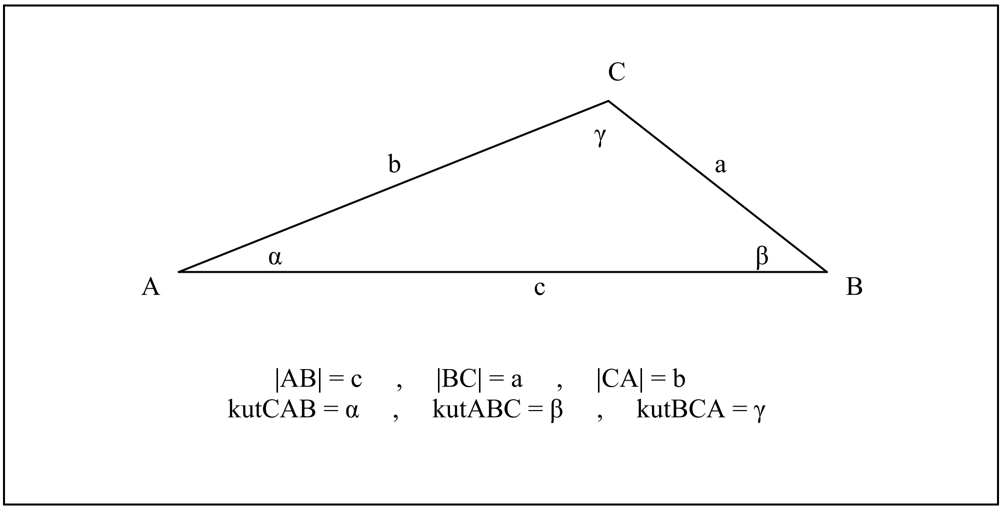
POVRŠINA TROKUTA IZRAŽENA STRANICAMA I KUTOVIMA

MLADEN HALAPA, *Bjelovar*

Površina trokuta može se izračunati na razne načine ovisno o zadanim elementima. Postoji cijeli niz formula. Interesantno je da ima i takvih u kojima se pojavljuju sve tri stranice i sva tri kuta: a, b, c, α, β i γ. U ovom članku dokazat ćemo četiri formule tog tipa, više kao zanimljivost jer nemaju praktičnu vrijednost. Neka je zadan trokut ABC.



FORMULA 1

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \quad .$$

► U logaritamskim tablicama nalazimo da se površina trokuta može računati pomoću formula:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \ .$$

Pomnožimo jednakosti i izračunamo površinu P:

$$P^3 = \frac{1}{8} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \ \Big| \sqrt[3]{\ } \ ,$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \ . \ \blacksquare$$

FORMULA 2

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta + \mathrm{ctg}\gamma} \quad .$$

► Iznovice u tablicama nalazimo formule za površinu trokuta izražene jednom stranicom i dvama kutovima na njoj:

$$P = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin(\beta + \gamma)} \quad , \quad P = \frac{b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin(\alpha + \gamma)} \quad , \quad P = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta)} \ .$$

Ako nazivnike gornjih jednakosti razvijemo po adicijskom teoremu za sinus:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

i u svakoj formuli razlomak skratimo s produktom sinusa u brojniku, dobije se:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{ctg\beta + ctg\gamma} \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{ctg\alpha + ctg\gamma} \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{ctg\alpha + ctg\beta} \ .$$

Odatle slijedi:

$$2P \cdot (ctg\beta + ctg\gamma) = a^2 \quad , \quad 2P \cdot (ctg\alpha + ctg\gamma) = b^2 \quad , \quad 2P \cdot (ctg\alpha + ctg\beta) = c^2 \ .$$

Zbrojimo jednakosti i nađemo površinu P:

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma} \ . \ \blacksquare$$

FORMULA 3

$$P = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot c}{a + b + c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \ .$$

► Podsjetimo se poučka o kosinusu:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \ , \qquad (1)$$

kosinusa i sinusa polovičnog kuta:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \quad , \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \ , \qquad (2)$$

i Heronove formule:

$$P = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \ , \qquad (3)$$

gdje su

$$s = \frac{a + b + c}{2} \quad , \quad s - a = \frac{b + c - a}{2} \quad , \quad s - b = \frac{a + c - b}{2} \quad , \quad s - c = \frac{a + b - c}{2} \ . \qquad (4)$$

Radi jednakosti (2) možemo pisati:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \text{zbog}(1) = \frac{2 \cdot b \cdot c + b^2 + c^2 - a^2}{4 \cdot b \cdot c} =$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{4 \cdot b \cdot c} = \frac{(b + c + a) \cdot (b + c - a)}{4 \cdot b \cdot c} = \text{zbog}(4) = \frac{s \cdot (s - a)}{b \cdot c} \ .$$

Konačno je

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - a)}{b \cdot c}} \ . \qquad (5)$$

Analognim postupkom dobiju se jednakosti:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - b)}{a \cdot c}} \ , \qquad (6)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - c)}{a \cdot b}} \ . \qquad (7)$$

Pomnožimo međusobno relacije (5) , (6) , (7) i koristeći formule (3) i (4) dobijemo traženi rezultat:

$$P = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot c}{a + b + c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \ . \ \blacksquare$$

FORMULA 4

$$P=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\quad .$$

► Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru dolazimo do rezultata. Iz (2) slijedi

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\text{zbog}(1)=\frac{2\cdot b\cdot c-b^2-c^2+a^2}{4\cdot b\cdot c}=$$
$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4\cdot b\cdot c}=\frac{(a+b-c)\cdot(a+c-b)}{4\cdot b\cdot c}=\text{zbog}(4)=\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{b\cdot c}\quad .$$

Pišemo

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{b\cdot c}}\quad . \tag{8}$$

Slično se dobiju

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-c)}{a\cdot c}}\quad , \tag{9}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)}{a\cdot b}}\quad . \tag{10}$$

Ako pomnožimo relacije (8) , (9) , (10) i primjenimo jednakosti (3) i (4), dobit ćemo traženu formulu:

$$P=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\quad . \ \blacksquare$$