

NIZOVI (m©h)

aritmetički niz (slijed)

razlika svakog člana (osim prvog) i člana ispred njega je stalna i iznosi d (diferencija, razlika)

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d$$

naziv

svaki član (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini prethodnika i sljedbenika

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

opći član aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

zbroj prvih n članova aritmetičkog niza

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n], \quad s_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$$

interpolacija aritmetičkog niza

ako između dva zadana broja a i b treba interpolirati (umetnuti) r brojeva tako da dobiveni niz bude aritmetički, onda je diferencija

$$d = \frac{b-a}{r+1}$$

geometrijski niz (slijed)

kvocijent (omjer) svakog člana (osim prvog) i člana ispred njega je stalan i iznosi q (kvocijent)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q$$

naziv

svaki član (osim prvog) jednak je geometrijskoj sredini prethodnika i sljedbenika

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

opći član geometrijskog niza

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

zbroj prvih n članova geometrijskog niza

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad s_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}$$

interpolacija geometrijskog niza

ako između dva zadana broja a i b treba interpolirati (umetnuti) r brojeva tako da dobiveni niz bude geometrijski, onda je kvocijent

$$q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}$$

beskonačni geometrijski red

zbroj (suma) beskonačnog geometrijskog reda

$$s = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

neki konačni redovi brojeva

$$1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad 1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1) = n^2$$

$$2+4+6+\dots+(2n-2)+2n = n \cdot (n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

faktorijele

umnožak prvih n prirodnih brojeva

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1, \quad n! = (n-1)! \cdot n, \quad n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n$$

binomni koeficijent

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} \quad \text{ili} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

svojstva binomnog koeficijenta

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

binomna formula

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

permutacije (važan redoslijed, koristimo sve elemente)

broj permutacija od n elemenata

$$P(n) = n!$$

permutacije s ponavljanjem

broj permutacija od n elemenata pri čemu se jedan element ponavlja r puta, drugi se ponavlja s puta (itd)

$$P_n^{r,s} = \frac{n!}{r! \cdot s!}$$

varijacije (važan redoslijed, ne koristimo sve elemente, $1 \leq r \leq n$)

broj varijacija r – tog razreda od n elemenata

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \quad \text{ili} \quad V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

varijacije s ponavljanjem

broj varijacija r – tog razreda od n elemenata s ponavljanjem

$$\overline{V}_n^r = n^r$$

kombinacije (nije važan redoslijed, ne koristimo sve elemente, $1 \leq r \leq n$)

broj kombinacija r – tog razreda od n elemenata

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \quad \text{ili} \quad C_n^r = \frac{1}{r!} \cdot V_n^r$$

kombinacije s ponavljanjem

broj kombinacija r – tog razreda od n elemenata s ponavljanjem

$$\overline{C}_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

klasična definicija vjerojatnosti

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m – broj povoljnih elementarnih događaja za događaj A, n – broj svih mogućih elementarnih događaja
osnovna svojstva vjerojatnosti

$$\begin{aligned} 0 \leq P(A) \leq 1, & \quad A \text{ je proizvoljan slučajan događaj} \\ P(\Omega) = 1, & \quad \text{vjerojatnost sigurnog događaja} \\ P(\emptyset) = 0, & \quad \text{vjerojatnost nemogućeg događaja} \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B),$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

dogadjaji A i B se isključuju, $A \cap B = \emptyset$

vjerojatnost suprotnog događaja

vjerojatnost unije, $A, B \subset \Omega$

vjerojatnost podskupa, $A, B \subset \Omega$

nezavisni događaji, $A, B \subset \Omega$

vjerojatnost događaja koji se ponavlja

ako je p vjerojatnost pojavljivanja događaja A u pokusu, tada u n nezavisnih pokusa vjerojatnost da se događaj A ostvari k puta jednaka je

$$P(A) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

vjerojatnost barem jedanput

ako je p vjerojatnost pojavljivanja događaja A u pokusu, tada u n nezavisnih pokusa vjerojatnost da se događaj A ostvari bar jednom jednaka je

$$P(A) = 1 - (1-p)^n$$

uvjetna vjerojatnost

vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

POSTOTNI RAČUN

postotni račun od 100

C – osnovna vrijednost, p – postotak, P – postotni iznos

$$C : 100 = P : p \Rightarrow 100 \cdot P = C \cdot p$$

$$P = \frac{C \cdot p}{100}, \quad C = \frac{100 \cdot P}{p}, \quad p = \frac{100 \cdot P}{C}$$

postotni račun više 100

C – osnovna vrijednost, p – postotak, P – postotni iznos

C + P – osnovna vrijednost uvećana za postotni iznos (uvećana osnovna vrijednost)

$$C : 100 = (C + P) : (100 + p) \Rightarrow C \cdot (100 + p) = 100 \cdot (C + P) \Rightarrow C = \frac{(C + P) \cdot 100}{100 + p}$$

$$P : p = (C + P) : (100 + p) \Rightarrow P \cdot (100 + p) = p \cdot (C + P) \Rightarrow P = \frac{(C + P) \cdot p}{100 + p}$$

postotni račun niže 100

C – osnovna vrijednost, p – postotak, P – postotni iznos

C – P – osnovna vrijednost umanjena za postotni iznos (umanjena osnovna vrijednost)

$$C : 100 = (C - P) : (100 - p) \Rightarrow C \cdot (100 - p) = 100 \cdot (C - P) \Rightarrow C = \frac{(C - P) \cdot 100}{100 - p}$$

$$P : p = (C - P) : (100 - p) \Rightarrow P \cdot (100 - p) = p \cdot (C - P) \Rightarrow P = \frac{(C - P) \cdot p}{100 - p}$$

PROMILNI RAČUN

promilni račun od 1000

C – osnovna vrijednost, p – promil, P – promilni iznos

$$C : 1000 = P : p \Rightarrow 1000 \cdot P = C \cdot p$$

$$P = \frac{C \cdot p}{1000}, \quad C = \frac{1000 \cdot P}{p}, \quad p = \frac{1000 \cdot P}{C}$$

promilni račun više 1000

C – osnovna vrijednost , p – promil , P – promilni iznos

$C + P$ – osnovna vrijednost uvećana za promilni iznos (uvećana osnovna vrijednost)

$$C : 1000 = (C + P) : (1000 + p) \Rightarrow C \cdot (1000 + p) = 1000 \cdot (C + P) \Rightarrow C = \frac{(C + P) \cdot 1000}{1000 + p}$$

$$P : p = (C + P) : (1000 + p) \Rightarrow P \cdot (1000 + p) = p \cdot (C + P) \Rightarrow P = \frac{(C + P) \cdot p}{1000 + p}$$

promilni račun niže 1000

C – osnovna vrijednost , p – promil , P – promilni iznos

$C - P$ – osnovna vrijednost umanjena za promilni iznos (umanjena osnovna vrijednost)

$$C : 1000 = (C - P) : (1000 - p) \Rightarrow C \cdot (1000 - p) = 1000 \cdot (C - P) \Rightarrow C = \frac{(C - P) \cdot 1000}{1000 - p}$$

$$P : p = (C - P) : (1000 - p) \Rightarrow P \cdot (1000 - p) = p \cdot (C - P) \Rightarrow P = \frac{(C - P) \cdot p}{1000 - p}$$

JEDNOSTAVNI KAMATNI RAČUN

C – glavnica ili kapital , p – kamatna stopa ili kamatnjak , K – jednostavne kamate ili interes
 n – vrijeme u godinama

$$C : 100 = K : (p \cdot n) \Rightarrow 100 \cdot K = C \cdot p \cdot n$$

$$K = \frac{C \cdot p \cdot n}{100} , C = \frac{100 \cdot K}{p \cdot n} , p = \frac{100 \cdot K}{C \cdot n} , n = \frac{100 \cdot K}{C \cdot p}$$

ako je m vrijeme u mjesecima tada preračunavamo $n = \frac{m}{12}$

ako je d vrijeme u danima, tada preračunavamo:

- francuska metoda – godina ima 360 dana, dani u mjesecima obračunavaju se prema kalendaru

$$n = \frac{d}{360}$$

- njemačka metoda – godina ima 360 dana, svaki mjesec 30 dana

$$n = \frac{d}{360}$$

- engleska metoda – godina ima 365 dana (prestupna 366), dani u mjesecima obračunavaju se prema kalendaru

$$n = \frac{d}{365} \text{ ili } n = \frac{d}{366}$$

jednostavni kamatni račun više 100

C – glavnica ili kapital , p – kamatna stopa ili kamatnjak , K – jednostavne kamate ili interes
 n – vrijeme u godinama , $C + K$ – uvećana glavnica za jednostavne kamate

$$C : 100 = (C + K) : (100 + p \cdot n) \Rightarrow C \cdot (100 + p \cdot n) = 100 \cdot (C + K) \Rightarrow C = \frac{(C + K) \cdot 100}{100 + p \cdot n}$$

$$K : (p \cdot n) = (C + K) : (100 + p \cdot n) \Rightarrow K \cdot (100 + p \cdot n) = p \cdot n \cdot (C + K) \Rightarrow K = \frac{(C + K) \cdot p \cdot n}{100 + p \cdot n}$$

jednostavni kamatni račun niže 100

C – glavnica ili kapital , p – kamatna stopa ili kamatnjak , K – jednostavne kamate ili interes
 n – vrijeme u godinama , $C - K$ – umanjena glavnica za jednostavne kamate

$$C : 100 = (C - K) : (100 - p \cdot n) \Rightarrow C \cdot (100 - p \cdot n) = 100 \cdot (C - K) \Rightarrow C = \frac{(C - K) \cdot 100}{100 - p \cdot n}$$

$$K : (p \cdot n) = (C - K) : (100 - p \cdot n) \Rightarrow K \cdot (100 - p \cdot n) = p \cdot n \cdot (C - K) \Rightarrow K = \frac{(C - K) \cdot p \cdot n}{100 - p \cdot n}$$

SLOŽENI KAMATNI RAČUN

C_0 – početna vrijednost uloga , n – broj ukamaćivanja , p – fiksna kamatna stopa
 C_n – konačna vrijednost uloga , r – dekurzivni kamatni faktor , r^n – faktor akumulacije

konačna vrijednost uloga

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ ili } C_n = C_0 \cdot r^n, \quad r = 1 + \frac{p}{100}$$

početna vrijednost uloga

$$C_n = C_0 \cdot r^n \Rightarrow C_0 = \frac{C_n}{r^n}$$

kamatna stopa

$$C_n = C_0 \cdot r^n \Rightarrow r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} \Rightarrow p = 100 \cdot \left[\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \right]$$

broj ukamaćivanja

$$C_n = C_0 \cdot r^n \Rightarrow n = \frac{\log \frac{C_n}{C_0}}{\log r}$$

nominalna, relativna, konformna kamatna stopa

nominalna kamatna stopa

propisana kamatna stopa za osnovni vremenski interval

a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa

b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje

$$m = \frac{a}{b}$$

relativna kamatna stopa

$$p_r = \frac{p}{m}$$

konformna kamatna stopa

$$p' = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]$$

omjer

omjer je kvocijent dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \text{ ili } \frac{a}{b} = k$$

svojstva omjera

$$(a \cdot m) : (b \cdot m) = k, \quad (a : n) : (b : n) = k$$

razmjer

razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera

$$a : b = c : d$$

osnovno svojstvo razmjera

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$