METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

MLADEN HALAPA, *Bjelovar*

Golem broj raznovrsnih zadataka može se rješavati istom tehnikom ili postupkom. Opisat ćemo metodu neodređenih koeficijenata navodeći tipične primjere njezina korištenja. Ona se primjenjuje za nalaženja koeficijenata izraza u slučaju kada je oblik tog izraza unaprijed zadan ili poznat.

Primjer 1. Prikažimo razlomak $\frac{1}{14}$ kao zbroj dva razlomka.

Rješenje. Broj 14 može se rastaviti na proste faktore kao 2 puta 7, pa onda imamo razlomke s nazivnicima 2 i 7. Kako odrediti njihove brojnike?
Zasad ih označimo koeficijentima A i B. Uvjet zadatka je:

$$\frac{1}{14}=\frac{A}{2}+\frac{B}{7}.$$

Pomnožimo zajedničkim nazivnikom i dobit ćemo linearnu diofantsku jednadžbu:

$$1=7A+2B.$$

Način njezina rješavanja opisan je u Matki (br.6.).Pogađanjem ćemo naći jedno rješenje

$$A = 1, \quad B = -3.$$

Dakle,

$$\frac{1}{14}=\frac{1}{2}-\frac{3}{7}.$$

Primjer 2. Zbrojimo sljedeće razlomke:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}.$$

Rješenje. Svaki se nazivnik može prikazati kao umnožak dva uzastopna prirodna broja, kao $n\cdot(n+1)$.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}.$$

Razlomci se napišu u obliku zbroja dvaju razlomaka. Nađimo opći postupak za rastav:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}.$$

Riješimo se nazivnika

$$1=A(n+1)+Bn,$$

tj.

$$1 = (A+B)n + A. \qquad (1)$$

Kako (1) vrijedi za sve *n*, iz toga slijedi

$$A + B = 0,$$
$$A = 1.$$

Dakle, A =1, B = –1, tj. vrijedi

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Primjenom ove formule lako možemo pronaći

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Primjer 3. Napišimo $\frac{1}{x^2-1}$ kao zbroj dvaju razlomaka.

Rješenje. Prema formuli za razliku kvadrata vrijedi

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

pa nam to sugerira da pokušamo sa sljedećim rastavom

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Pomnožimo navedenu jednakost s $(x-1)(x+1)$:

$$1 = A(x+1) + B(x-1).$$

Sređivanjem i grupiranjem dobiva se

$$1 = (A+B)x + (A-B).$$

Jednakost mora vrijediti za sve *x*, pa je zato:

$$A + B = 0,\; A - B = 1.$$

Rješenje je tog sustava

$$A = \frac{1}{2},$$

$$B = -\frac{1}{2}, \text{ pa je}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2\cdot(x-1)} - \frac{1}{2\cdot(x+1)}.$$

Provjeri!

Primjer 4. Metodom neodređenih koeficijenata riješimo sustav jednadžbi:

$$3x + 2y = 9,$$
$$2x + 3y = 11.$$

Rješenje. Ovakvi sustavi jednadžbi rješavaju se raznim postupcima (metodom komparacije, metodom supstitucije, metodom suprotnih koeficijenata, metodom determinanata, …). Naša je metoda i tu djelotvorna.

Pomnožimo naprimjer prvu jednadžbu s još neodređenim koeficijentom A, A ≠ 0:

$$3Ax + 2Ay = 9A,$$
$$2x + 3y = 11$$

i dobivene jednadžbe zbrojimo:

$$3Ax + 2x + 2Ay + 3y = 9A + 11.$$

Odavde je

$$(3A+2)x + (2A+3)y = 9A + 11. \qquad (2)$$

Ako izraz uz nepoznanicu x izjednačimo s nulom

$$3A + 2 = 0,$$

dobit ćemo $A = -\frac{2}{3}$, pa jednadžba (2) postaje:

$$(2A+3)y = 9A + 11. \qquad (3)$$

Uvrstimo A u (3) i nađimo y. Dobiva se $y = 3$.

Nepoznanica x može se dobiti na dva načina: uvrštavanjem $y = 3$ u bilo koju polaznu jednadžbu; izjednačavanjem s nulom izraza uz nepoznanicu y, ($2A + 3 = 0$), i analognim načinom računanjem kao u navedenom slučaju.

Rješenje sustava je:

$$x = 1, \quad y = 3.$$

Primjer 5. Dovršimo jednadžbu neutralizacije sulfatne kiseline bazom $Al(OH)_3$:

$$...H_2SO_4 + ...Al(OH)_3 \rightarrow ...Al_2(SO_4)_3 + ...H_2O.$$

Rješenje. Treba naći broj molekula. Umjesto točkica uvedimo koeficijente A, B, C i D.

$$A \cdot H_2SO_4 + B \cdot Al(OH)_3 \rightarrow C \cdot Al_2(SO_4)_3 + D \cdot H_2O.$$

Bitno je pri pisanju uzeti u obzir građu molekule i paziti na broj atoma.

Broj atoma na lijevoj strani jednadžbe mora biti jednak broju atoma na desnoj strani jednadžbe.

Napišimo jednakosti za broj atoma svakog elementa.

	lijeva strana jednadžbe	desna strana jednadžbe
H …	2A + 3B =	2D
S …	A =	3C
O …	4A + 3B =	12C + D
Al …	B =	2C

Rješavanjem ovog sustava nalazimo da je

$$\mathrm{A} = 3,\ \mathrm{B} = 2,\ \mathrm{C} = 1,\ \mathrm{D} = 6.$$

Prema tome, jednadžba neutralizacije glasi

$$3 \cdot H_2SO_4 + 2 \cdot Al(OH)_3 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 6 \cdot H_2O.$$

Zadatci

1. Izračunajte zbrojeve:

a) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}$,

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$,

c) $2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}\right)$.

2. Odredite A i B u sljedećim rastavima:

a) $\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$,

b) $\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$.

3. Riješite sustav jednadžbi metodom neodređenih koeficijenata:

$$\begin{aligned} x-2y&=-1\\ 3x-5y&=-2. \end{aligned}$$

4. Dovršite jednadžbu neutralizacije sulfatne kiseline bazom NaOH:

$$\ldots H_2SO_4 + \ldots NaOH \rightarrow \ldots Na_2SO_4 + \ldots H_2O.$$