NEJEDNAKOSTI (m©h)

Znakovi nejednakosti:

$>$ ("veće") , $\geq$ ("veće ili jednako") , $<$ ("manje") , $\leq$ ("manje ili jednako")

Ako su a i b dva različita realna broja i ako je njihova razlika a – b pozitivna, tada je a veće od b, u oznaci a > b, tj. b manje od a, u oznaci b < a:

$$a-b>0 \Rightarrow a>b \Rightarrow b<a.$$

Za dva realna broja a i b postoji samo jedna od relacija:

$$a<b \text{ ili } a=b \text{ ili } a>b.$$

$a>b$ i $b>c \Rightarrow a>c$ (svojstvo tranzitivnosti)

$a>b$ i $c>0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

$a>b$ i $c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

$a<b$ i $c>0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

$a<b$ i $c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

* $a>b$ i $c<0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

* $a>b$ i $c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

* $a<b$ i $c<0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

* $a<b$ i $c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

* Ako oba dijela nejednakosti pomnožimo ili podijelimo s istim negativnim brojem, dobivamo nejednakost suprotnog smisla.

$a>b$ i $c=0 \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$

$a<b$ i $c=0 \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$

** $a>b$ i $c\in R \Rightarrow a+c>b+c$

** $a<b$ i $c\in R \Rightarrow a+c<b+c$

** Dodavanjem jedne te iste veličine na obje strane nejednakosti njezin smisao se ne mijenja.

$a>b>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

$a<b<0 \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

*** $a>b$ i $c>d \Rightarrow a+c>b+d$

*** $a_1>b_1,\ a_2>b_2,\ a_3>b_3,\ \ldots,\ a_n>b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n>b_1+b_2+b_3+\ \ldots\ +b_n$

*** Nejednakosti istog smisla zbrajamo tako da zbrojimo desne strane i zbrojimo lijeve strane.

$a>b$ i $c<d \Rightarrow a-c>b-d$

$a>b>0$ i $c>d>0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot d$

$a>b$ i $c>d$ i $a>0$ i $d>0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot d$

$a_1>b_1>0,\ a_2>b_2>0,\ \ldots,\ a_n>b_n>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ \ldots\ \cdot a_n>b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\ \ldots\ \cdot b_n$

$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$

$a>b>0 \Rightarrow \frac{1}{a^n}<\frac{1}{b^n}$

$a>0>b \Rightarrow a^{2\cdot n+1}>b^{2\cdot n+1}$

$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

$a>b>0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}}>b^{\frac{p}{q}}$

$a>b>0$ i $x>0 \Rightarrow a^x>b^x$

$|a+b|\leq|a|+|b|$ (nejednakost trokuta)

$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k|$

$\big||a|-|b|\big|\leq|a+b|$

$\left(|a|-|b|\right)^2\leq\left|a^2-b^2\right|$

$\left|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}\right|\leq\sqrt{|a-b|}$

$|x|<a,\ a>0 \Rightarrow -a<x<a$

$|x|\leq a,\ a>0 \Rightarrow -a\leq x\leq a$

$|x|>a,\ a>0 \Rightarrow x<-a$ i $x>a$

$|x|\geq a,\ a>0 \Rightarrow x\leq -a$ i $x\geq a$

$a,b\in R \Rightarrow |a|-|b|\leq|a-b|\leq|a|+|b|$

Bernoullijeva nejednakost

Za sve realne brojeve $a \geq -1$ i cijele brojeve $n \geq 1$ vrijedi

$$(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$$

Znak jednakosti vrijedi kada je $n = 1$ ili $a = 0$.

Binomna nejednakost

$$a, b \in R \Rightarrow |a\cdot b| \leq \frac{1}{2}\cdot\left(a^2+b^2\right)$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost

Za sve realne brojeve a_i, b_i vrijedi

$$\left|a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3+\ \dots\ +a_n\cdot b_n\right| \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots b_n^2}$$

ili

$$\left(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3+\ \dots\ +a_n\cdot b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots b_n^2\right)$$

Nejednakost Čebiševa

Ako su $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ pozitivni realni brojevi, onda vrijedi:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_n}{n}\right)\cdot\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\ \dots\ +b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3+\ \dots\ +a_n\cdot b_n}{n}$$

$$\text{za } a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \text{ i } b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n$$

$$\text{ili } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \text{ i } b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n.$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_n}{n}\right)\cdot\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\ \dots\ +b_n}{n}\right) \geq \frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3+\ \dots\ +a_n\cdot b_n}{n}$$

$$\text{za } a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \text{ i } b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n.$$