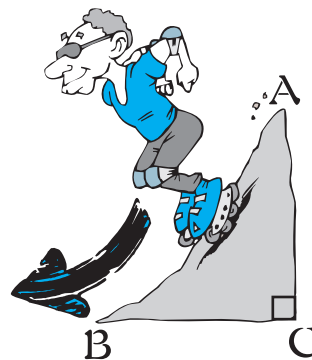


# Neki poučci o trokutu



Andelko Marić, Sinj

U članku ćemo pokušati neke jednostavne činjenice o trokutu izraziti pomoću vektora, ili točnije, neke ćemo poučke o trokutu iskazati u vektorskom obliku. Na kraju ćemo, pomoću tih poučaka, dokazati neke poučke, koji se najčešće drugačije dokazuju.

Da bi se moglo pratiti tekst, nužno je, uz osnovne pojmove o trokutu, poznavati i temeljne pojmove vektorskog računa (pojam suprotnog i nulvektora, zbrajanje i skalarno množenje vektora i slično).

U cijelom ćemo tekstu rabiti stalne oznake: vrhove trokuta označavat ćemo s  $A$ ,  $B$  i  $C$ ; polovišta stranica trokuta s  $P$ ,  $Q$  i  $R$ ; težište, ortocentar i središte trokutu opisane kružnice s  $T$ ,  $H$  i  $S$ . U nekim slučajevima pojavit će se i još neke oznake, što će biti posebno naznačeno. D.1., D.2., ..., P.1., P.2., ... znače definicije, odnosno poučke, što se neće uvijek posebno naglašavati.

**D.1.** U trokutu  $ABC$  vektore  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  i  $\vec{CA}$  zvat ćemo **vektorima stranica** tog trokuta.

**P.1.** Zbroj vektora stranica bilo kojeg trokuta jest nulvektor.

*Dokaz.* Vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CA} \\ &= \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Vrijedi i obrat tog poučka, što se iskazuje kao

**P.2.** Ako za nekolinearne vektore  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  i  $\vec{z}$  vrijedi  $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$ , tada su ti vektori vektori stranica nekog trokuta.

*Dokaz.* Rubne točke vektora  $\vec{x}$  označimo s  $A$  i  $B$ , to jest  $\vec{x} = \vec{AB}$ . Vektor  $\vec{y}$  dovedimo s početkom u točku  $B$ , tada njegov završetak padne u neku točku  $C$ , to jest  $\vec{y} = \vec{BC}$ . Budući da je  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ , to je  $\vec{AC} + \vec{z} = \vec{0}$ , ili  $\vec{z} = \vec{CA}$ . A to znači da su  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  i  $\vec{z}$  vektori stranica trokuta  $ABC$ .

**P.3.** Vektor kojemu su rubne točke polovišta stranica trokuta jednak je polovici vektora treće stranice tog trokuta. (Poučak o srednjici trokuta)

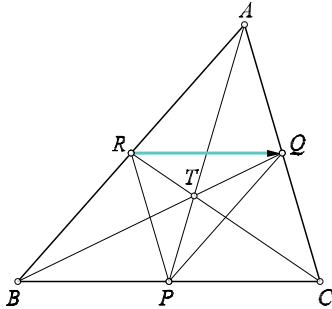
*Dokaz.* Treba, uz oznake kao na sl. 1., dokazati da je  $2\vec{RQ} = \vec{BC}$ ,  $2\vec{QP} = \vec{AB}$ ,  $2\vec{PR} = \vec{CA}$ .



Vrijedi

$$\begin{aligned} 2\vec{RQ} &= 2(\vec{RA} + \vec{AQ}) = 2\left(\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right) \\ &= \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}. \end{aligned}$$

Isto se tako dokazuje i za ine dvije srednjice.



Slika 1.

**D.2.** Ako su točke  $P$ ,  $Q$  i  $R$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , vektore  $\vec{AP}$ ,  $\vec{BQ}$  i  $\vec{CR}$  zvat ćemo **vektorima težišnica** trokuta  $ABC$ .

**P.4.** Zbroj vektora težišnica trokuta jest nulvektor.

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} \vec{AP} + \vec{BQ} + \vec{CR} &= \vec{AB} + \vec{BP} + \vec{BC} + \vec{CQ} + \vec{CA} + \vec{AR} \\ &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) \\ &= \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = (\text{P.1}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

**P.5.** Za svaki trokut  $\Delta_1$ , postoji trokut  $\Delta_2$  takav da su vektori stranica trokuta  $\Delta_2$  vektori težišnica trokuta  $\Delta_1$ .

*Dokaz.* Tvrdnja poučka slijedi neposredno iz P.4. i P.2.

**P.6.** Ako je  $T$  težište trokuta  $ABC$ , tada vrijedi  $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{0}$ .

*Dokaz.* Prema poučku o težištu trokuta vrijedi:

$$\vec{TA} = \frac{2}{3}\vec{PA}, \quad \vec{TB} = \frac{2}{3}\vec{QB}, \quad \vec{TC} = \frac{2}{3}\vec{RC},$$

a odavde je

$$\begin{aligned} \vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} &= -\frac{2}{3}(\vec{AP} + \vec{BQ} + \vec{CR}) \\ &= (\text{prema P.4.}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

**P.7.** Ako je  $O$  bilo koja točka ravnine, a  $T$  težište trokuta  $ABC$ , tada vrijedi  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OT}$ .

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= \vec{OT} + \vec{TA} + \vec{OT} + \vec{TB} + \vec{OT} + \vec{TC} \\ &= 3\vec{OT} + (\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC}) \\ &= 3\vec{OT}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili tvrdnju P.6.

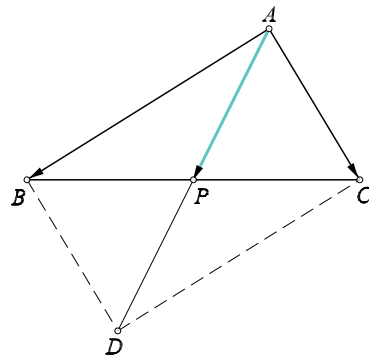
**P.8.** Vektor težišnice s početkom u jednom vrhu trokuta jednak je poluzbroju dvaju vektora s početcima u tom vrhu i završetcima u inim dvama vrhovima trokuta.

*Dokaz.* Težišnicu  $\vec{AP}$  trokuta  $ABC$  produžimo preko  $P$  do točke  $D$ , tako da je  $|PD| = |AP|$ , kao na sl. 2. Četverokut  $ABDC$  je paralelogram, jer mu se dijagonale rasplavljuju.

Zato je  $\vec{BD} = \vec{AC}$ , a zbog toga

$$2\vec{AP} = \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{AC},$$

ili  $\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ , što je tvrdnja poučka. Na isti se način to dokaže i za ine dvije težišnice.



Slika 2.



**D.3.** Trokut kojemu su vrhovi polovišta stranica zadanog trokuta zove se **polovišni trokut** tog trokuta.

**P.9.** Težište polovišnog trokuta podudara se s težištem polaznog trokuta.

*Dokaz.* Ako su  $P, Q$  i  $R$  polovišta stranica trokuta  $ABC$ , a  $O$  bilo koja točka ravnine, dovoljno je, prema P.7., dokazati da vrijedi  $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .

Vrijedi:

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP},$$

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} \implies 2\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{OC},$$

jer je

$$\vec{BP} + \vec{CP} = \vec{O}.$$

Isto je tako

$$2\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{OA},$$

$$2\vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

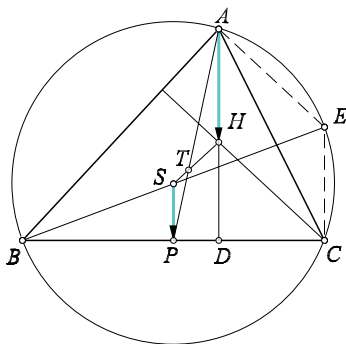
Odavde je

$$2(\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}) = 2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}),$$

što je ekvivalentno tvrdnji poučka.

**P.10.** Ako su u trokutu  $ABC$  točke  $P, Q$  i  $R$  polovišta stranica,  $H$  ortocentar, a  $S$  središte trokutu opisane kružnice, tada vrijedi:  $\vec{AH} = 2\vec{SP}$ ,  $\vec{BH} = 2\vec{SQ}$ ,  $\vec{CH} = 2\vec{SR}$ .

*Dokaz.* Neka je  $E$  druga rubna točka promjera  $\overline{BE}$  kružnice opisane trokutu  $ABC$ , kao na sl. 3, tada je  $\sphericalangle BCE = \sphericalangle EAB = 90^\circ$  (Talesov poučak).



Slika 3.

Kako je  $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ , to je  $\overline{CH} \parallel \overline{EA}$ . Iz istoga je razloga  $\overline{AH} \parallel \overline{EC}$ , što je dovoljno da je četverokut  $AHCE$  paralelogram. Zato je  $\vec{AH} = \vec{EC}$ .

Dužina  $\overline{SP}$  je srednjica trokuta  $BCE$ , te je, prema P.3.,  $\vec{EC} = 2\vec{SP}$ , to jest  $\vec{AH} = 2\vec{SP}$ .

Isto se tako dokažu i ine dvije jednakosti poučka. Ovaj se poučak najčešće izriče skalarno, u obliku: udaljenosti ortocentra od jednog vrha trokuta jednaka je dvostukoj udaljenosti središta trokuta opisane kružnice od nasuprotne stranice. Međutim, ovako izrečen poučak je “jači”, jer, osim jednakosti udaljenosti, on govori i o usporednosti pripadnih dužina.

**P.11.** Težište ( $T$ ), ortocentar ( $H$ ) i središte trokutu opisane kružnice ( $S$ ) su točke istog pravca, pri čemu vrijedi  $\vec{HT} = 2\vec{TS}$ .

*Dokaz.* Neka se dužina  $\overline{SH}$  i težišnica  $\overline{AP}$  sijeku u točki  $T$ , kao na sl. 3. Dokažimo da je  $T$  težište trokuta  $ABC$ . Kako je  $\overline{SP} \parallel \overline{AH}$ , to je  $\sphericalangle SPT = \sphericalangle HAT$ , što je, uz  $\sphericalangle PTS = \sphericalangle ATH$ , dovoljno da su trokuti  $PTS$  i  $ATH$  slični. Prema P.10. vrijedi  $\vec{AH} = 2\vec{SP}$ , zbog čega je  $\vec{AT} = 2\vec{TP}$ . Vidimo da točka  $T$  dijeli težišnicu  $\overline{AP}$  u omjeru 2:1, zbog čega je  $T$  težište trokuta  $ABC$ . Sada je, zbog sličnosti,  $\vec{HT} = 2\vec{TS}$ , čime je poučak dokazan.

Pravac koji sadrži točke  $S, T$  i  $H$  nekog trokuta zove se Eulerov pravac toga trokuta.

**P.12.** Ako se u trokutu  $ABC$  podudaraju dvije od točaka  $S, T$  i  $H$ , tada se i treća od tih točaka podudara s tim dvjema.

*Dokaz.* Prema P.11. vrijedi

$$\vec{HT} = 2\vec{TS} \iff \vec{HS} = 2\vec{TS}.$$

Ako se dvije od navedenih točaka podudaraju, tada je jedan od vektora  $\vec{TS}, \vec{HT}$ , ili  $\vec{HS}$  nulvektor. Međutim, tada su i ina dva od tih vektora također nulvektori, što je moguće samo ako se i treća točka podudara s inim dvjema.

**P.13.** Ako se u trokutu  $ABC$  točke  $S$  i  $H$  podudaraju, tada je trokut jednakostraničan.



*Dokaz.* Kako je  $\overline{AH} \perp \overline{BC}$  i  $\overline{SD} \perp \overline{BC}$ , te ako je  $S \equiv H$ , tada se težišnica i visina povučene iz vrha  $A$  podudaraju. To isto vrijedi i za težišnice i visine iz ina dva vrha. Trokut kojemu se težišnice podudaraju s visinama jest jednakostraničan.

**P.14.** *Ako se u trokutu dvije od točaka  $S$ ,  $T$  i  $H$  podudaraju, tada je trokut jednakostraničan.*

*Dokaz.* Tvrdnja poučka neposredno slijedi iz P.12. i P.13.

Ovaj poučak je obrat poznatog poučka: težište, ortocentar i središte jednakostraničnom trokutu opisane kružnice padaju u istu točku.

**P.15.** *U trokutu  $ABC$  vrijedi*

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SH}.$$

(Hamiltonov poučak)

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} &= \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TC} \\ &= 3\overrightarrow{ST} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{SH}. \end{aligned}$$

U ovom smo kratkom dokazu koristili tvrdnje poučaka P.11. i P.6.

**P.16.** *Četverostruki zbroj kvadrata duljina težišnica trokuta jednak je trostrukom zbroju kvadrata duljina stranica toga trokuta.*

*Dokaz.* Prema P.8. vrijedi

$$\begin{aligned} (2\overrightarrow{AP})^2 + (2\overrightarrow{BQ})^2 + (2\overrightarrow{CR})^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})^2 + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2, \\ 4(|AP|^2 + |BQ|^2 + |CR|^2) &= 2(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) \\ &\quad + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) \\ &= 2(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &\quad + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= 2(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 \\ &= 3(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2). \end{aligned}$$

**P.17.** *Ako je  $O$  bilo koja točka ravnine, a  $T$  težište trokuta  $ABC$ , tada vrijedi:*

$$9|OT|^2 = 3(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2) - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

*Dokaz.* Iz P.7. slijedi

$$(3\overrightarrow{OT})^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2,$$

a odatle:

$$9|OT|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}).$$

Kako je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

to je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}^2 &= \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \\ \implies 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2. \end{aligned}$$

Isto je tako

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= |OB|^2 + |OC|^2 - |BC|^2, \\ 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} &= |OC|^2 + |OA|^2 - |CA|^2. \end{aligned}$$

Zbog toga je

$$9|OT|^2 = 3(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2) - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

**P.18.** *Duljine stranica trokuta su  $a$ ,  $b$  i  $c$ , a  $R$  je polumjer trokutu opisane kružnice. Za udaljenost središta i težišta trokuta vrijedi:*

$$|ST|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

*Dokaz.* Ako u P.17. za točku  $O$  uzmemo središte trokutu opisane kružnice ( $S$ ), tada zbog  $|OA| = |OB| = |OC| = R$ , tvrdnja tog poučka prelazi u tvrdnju koju treba dokazati.

