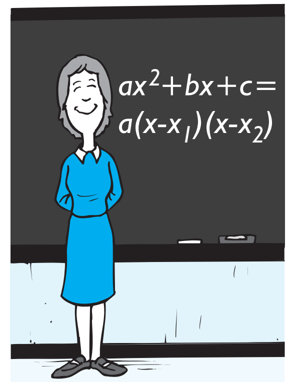


Rastav kvadratnog trinoma na faktore

Sanja Varošanec*, Zagreb

U prvom razredu srednje škole pojavljuje se problem rastava trinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$ na faktore. Isti taj problem javlja se i u drugom razredu u cjelini "Kvadratna jednadžba", ali se u tom trenutku problem lako rješava, jer se koristi rastav

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdje su x_1, x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. No, u prvom razredu učenik još ne vlada rješavanjem kvadratne jednadžbe u svoj njezinoj općenitosti, pa pri rastavljanju trinoma na faktore treba pribjeći nekim drugim metodama.

Jedna od tih metoda jest nadopunjavanje dijela trinoma do potpunog kvadrata, a druga metoda se sastoji u tome da se srednji član bx napiše u obliku sume dva pribrojnika, te se zatim nakon pogodnog grupiranja izvrši faktorizacija.

Ilustrirajmo obje metode na jednom primjeru.

Primjer 1. Trinom $6x^2 - 7x - 5$ napišimo u obliku umnoška.

I. način. Nadopuna do potpunog kvadrata.

Izlučimo koeficijent vodećeg člana, te dodajmo i oduzmimo kvadrat polovine koeficijenta uz x:

$$\begin{aligned}
6x^2 - 7x - 5 &= 6\Big(x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{5}{6}\Big)\\
&= 6\Big(x^2 - \frac{7}{6}x + \Big(\frac{7}{12}\Big)^2 - \Big(\frac{7}{12}\Big)^2 - \frac{5}{6}\Big)\\
&= 6\left[\Big(x - \frac{7}{12}\Big)^2 - \frac{49}{144} - \frac{5}{6}\right]\\
&= 6\left[\Big(x - \frac{7}{12}\Big)^2 - \frac{169}{144}\right]\\
&= 6\left[\Big(x-\frac{7}{12}\Big)-\frac{13}{12}\right]\left[\Big(x-\frac{7}{12}\Big)+\frac{13}{12}\right]\\
&= 6\Big(x - \frac{5}{3}\Big)\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\\
&= 3\Big(x-\frac{5}{3}\Big)\cdot 2\Big(x+\frac{1}{2}\Big)=(3x-5)(2x+1).
\end{aligned}$$

II. način. Rastav srednjeg člana.

Umnožak koeficijenta vodećeg člana i slobodnog člana je $a \cdot c = 6 \cdot (-5) = -30$. Rastavimo taj umnožak na dva faktora m i n.

$m \cdot n$	$-1 \cdot 30$	$1 \cdot (-30)$	$-2 \cdot 15$	$2 \cdot (-15)$
$m + n$	29	-29	13	-13

$m \cdot n$	$-3 \cdot 10$	$3 \cdot (-10)$	$-5 \cdot 6$	$5 \cdot (-6)$
$m + n$	7	-7	1	-1

*varosans@math.hr

Među svim ovim umnošcima izdvojimo onaj kojemu je zbroj faktora jednak koeficijentu uz x. U ovom slučaju to je umnožak $3\cdot(-10)$. Dakle, srednji član $-7x$ zapisat ćemo kao $3x-10x$. Sad imamo

$$\begin{aligned}6x^2-7x-5&=6x^2+3x-10x-5\\&=3x(2x+1)-5(2x+1)\\&=(2x+1)(3x-5).\end{aligned}$$

Dakle, druga se metoda sastoji u tome da se koeficijent srednjeg člana napiše kao suma dva pribrojnika čiji umnožak je jednak umnošku koeficijenata vodećeg i slobodnog člana.

Zadržimo se na drugoj metodi, jer na prvi pogled nije baš jasno možemo li uvijek učiniti ovaj rastav. Zamijetimo da trinomi koje rastavljamo u 1. razredu zadovoljavaju ove uvjete: koeficijenti a, b i c su cijeli brojevi, $a\neq 0$, a nultočke x_1 i x_2 su racionalni brojevi. Također, možemo smatrati da su b i c različiti od 0, budući da u protivnom trinom rastavljamo ili kao razliku kvadrata ili izlučivanjem varijable x.

Navedimo neke od posljedica ovih uvjeta.

Budući da su $x_1, x_2\in\mathbf{Q}$, tj.

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\in\mathbf{Q}$$

i $a, b\in\mathbf{Z}$, slijedi da je $\sqrt{b^2-4ac}\in\mathbf{Q}$. Ali, budući da je izraz b^2-4ac cjelobrojan, slijedi da je $\sqrt{b^2-4ac}$ također cijeli broj. Nadalje, $\sqrt{b^2-4ac}$ je iste parnosti kao i broj b, pa su $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ cijeli brojevi, tj. ax_1, ax_2 su cijeli brojevi.

Riješimo sada pitanje postojanja brojeva m i n takvih da je

$$\begin{aligned}m\cdot n&=ac\\m+n&=b.\end{aligned}$$

Ovo je sustav od 2 jednadžbe s dvije nepoznanice m i n, pa izražavanjem nepoznanice n iz druge jednadžbe i uvrštavanjem u prvu dobivamo

$$\begin{aligned}m\cdot(b-m)&=ac\\m^2-bm+ac&=0.\end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $m_{1,2}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$, tj. $m_{1,2}=-ax_{1,2}$. Dakle, m_1 i m_2 su cijeli brojevi, a time i n_1 i n_2. Lako se vidi da je $m_1=n_2$ i $m_2=n_1$, pa možemo govoriti o jedinstvenim brojevima m i n koji zbrojeni daju b, a pomnoženi $a\cdot c$. Štoviše, ako su $a, b, c\in\mathbf{Z}$ i $x_1, x_2\in\mathbf{Q}$, brojevi m i n su cijeli.

Dakle, trinom sad rastavljamo ovako

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=ax^2+mx+nx+c\\&=d_1x\Big(\frac{a}{d_1}x+\frac{m}{d_1}\Big)+\frac{nd_1}{a}\Big(\frac{a}{d_1}x+\frac{ac}{nd_1}\Big)\end{aligned}$$

gdje je $d_1=D(a,m)$.

Jesmo li ovim grupiranjem i izlučivanjem dobili jednake izraze u zagradama?

Treba provjeriti vrijedi li $\dfrac{m}{d_1}=\dfrac{ac}{nd_1}$.

Iz uvjeta $mn=ac$ slijedi $m=\dfrac{ac}{n}$, odakle je očito da vrijedi $\dfrac{m}{d_1}=\dfrac{ac}{nd_1}$. Uočimo da su $\dfrac{a}{d_1}$, $\dfrac{m}{d_1}$, pa time i $\dfrac{ac}{nd_1}$ cijeli brojevi.

Zanimljivo je da je i $\dfrac{nd_1}{a}$ cijeli broj. Naime, budući da je $d_1=D(a,m)$, slijedi da postoji cijeli broj a_1 takav da je $a=a_1d_1$ i $D(a_1,m)=1$. Dakle, $\dfrac{nd_1}{a}=\dfrac{nd_1}{a_1d_1}=\dfrac{n}{a_1}$. Iz $ac=m\cdot n$ i $a_1|a$ slijedi $a_1|ac$, tj. $a_1|mn$, pa uz činjenicu da je $D(a_1,m)=1$ slijedi da $a_1|n$, tj. $\dfrac{n}{a_1}$ je cijeli broj.

Sad imamo

$$\begin{aligned}ax^2&+bx+c=\\&=d_1x\Big(\frac{a}{d_1}x+\frac{m}{d_1}\Big)+\frac{nd_1}{a}\Big(\frac{a}{d_1}x+\frac{m}{d_1}\Big)\\&=\Big(\frac{a}{d_1}x+\frac{m}{d_1}\Big)\Big(d_1x+\frac{nd_1}{a}\Big),\end{aligned}$$

pri čemu su svi koeficijenti linearnih izraza cijeli brojevi, te smo zadani trinom prikazali u obliku umnoška.

Ovaj postupak uz manje modifikacije, provediv je i za trinome čiji koeficijenti su realni, pa čak i kompleksni brojevi, no tada se općenito gubi cjelobrojnost koeficijenata u rastavu.

Pokažimo na još nekoliko primjera ovu metodu.

Primjer. Rastavimo na faktore

a) $2x^2 + 5x + 2$;

b) $x^2 + x - 2$;

c) $14x^2 + 19xy - 3y^2$.

Rješenje. a) $a = 2, b = 5, c = 2, a \cdot c = 4$

$m \cdot n$	$1 \cdot 4$	$-1 \cdot (-4)$	$2 \cdot 2$	$(-2) \cdot (-2)$
$m + n$	5	-5	4	-4

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 2 &= 2x^2 + x + 4x + 2 \\ &= x(2x + 1) + 2(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(x + 2). \end{aligned}$$

b) $a = 1, b = 1, c = -2, ac = -2$

mn	$1 \cdot (-2)$	$-1 \cdot 2$
$m + n$	-1	1

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= x^2 - x + 2x - 2 \\ &= x(x - 1) + 2(x - 1) \\ &= (x - 1)(x + 2). \end{aligned}$$

c) $a = 14, b = 19, c = -3, ac = -42$

mn	$1(-42)$	$-1 \cdot 42$	$2 \cdot (-21)$	$-2 \cdot 21$
$m + n$	-41	41	-19	19

mn	$3 \cdot (-14)$	$-3 \cdot 14$	$6 \cdot (-7)$	$-6 \cdot 7$
$m + n$	-11	11	-1	1

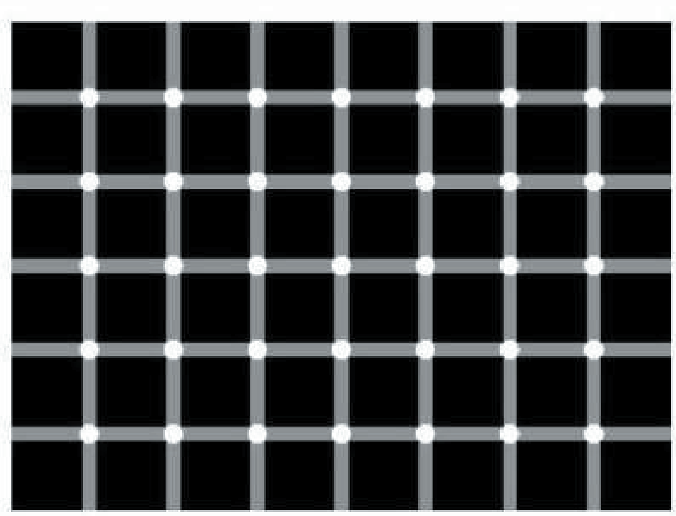
$$\begin{aligned} 14x^2+19xy-3y^2 &= 14x^2-2xy+21xy-3y^2 \\ &= 2x(7x-y)+3y(7x-y) \\ &= (7x-y)(2x+3y). \end{aligned}$$

* * *

Zadatak

Naš vjerni čitatelj Polko Mironijo poslao nam je ovaj zadatak:

Koliko je na ovoj slici crnih točkica?



Zaista, koliko ih je? Za svaku sigurnost ponovite prebrojavanje.