O jednoj lijepoj analogiji

Branimir Dakić, Zagreb

Uz funkciju $f(x) = |x|$ javlja se kroz cijelu srednju školu čitav niz raznih zadataka. Posebice su zanimljive jednadžbe i nejednadžbe vezane uz relacije s apsolutnim vrijednostima čija obrada pruža vrlo široke mogućnosti, prije svega u postupcima njihova rješavanja, ali i u mogućim zornim, geometrijskim predodžbama i interpretacijama. Prije nego što pristupimo njihovu rješavanju, obradit ćemo na nekoliko primjera grafičke predodžbe nekih jednostavnijih takvih relacija te ukazati na zgodne analogije s nekim drugim relacijama.

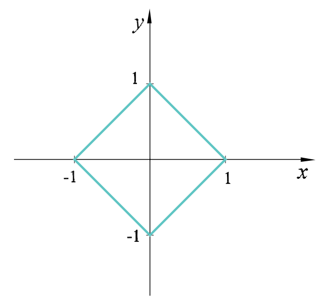
Primjer 1. Prikažimo grafički skup svih točaka ravnine čije koordinate x i y zadovoljavaju jednakost

$$|x| + |y| = 1.$$

Uočimo da je ova relacija *parna.* Naime, označimo li je sa $f(x, y)$, onda je

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(-x, -y) = f(x, -y),$$

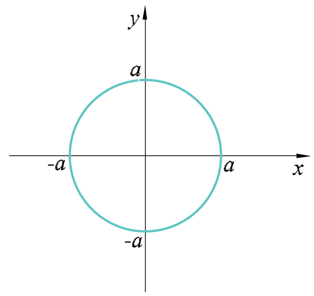
za sve realne brojeve x i y. Pomišljamo li na njezin grafički prikaz, to znači da je dovoljno nacrtati graf te relacije u prvom kvadrantu, ($x \geq 0$ i $y \geq 0$.) Tada imamo jednadžbu $x + y = 1$ što u I. kvadrantu određuje dužinu, dio pravca $y = -x + 1$. Potom tu dužinu valja zrcaliti uzastopce oko koordinatnih osi.



Slika će biti kvadrat sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i s dijagonalom duljine 2.

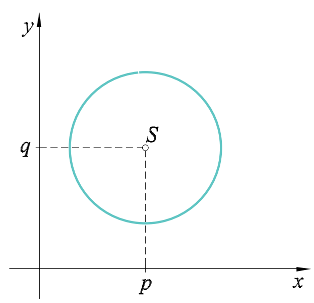
Općenito, za realni broj a, $a > 0$, graf relacije $|x| + |y| = a$ jest kvadrat sa središtem u ishodištu kojem su vrhovi na koordinatnim osima i čija je dijagonala duljine $2a$.

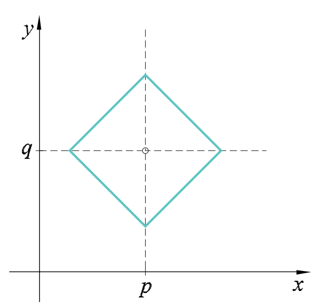
Ono što je sada zgodno uočiti jest usporedba jednadžbe $|x| + |y| = a$, i jednadžbe $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$. Prva jednadžba jest *jednadžba kvadrata*, a druga jednadžba je *jednadžba kružnice*. I kvadrat i kružnica imaju središte u ishodištu koordinatnog sustava, duljina dijagonale kvadrata jednaka je $2a$, a i promjer kružnice jednak je $2a$.



U jednadžbi $|x| + |y| = a$, zbroj dvaju pozitivnih realnih brojeva $|x|$ i $|y|$ jest pozitivan realni broj a. Isto izriče i jednadžba $x^2 + y^2 = a^2$. Razlika je u tome što je prva veza *linearna* a druga *kvadratna*, pa u prvom slučaju stoga i imamo kvadrat, lik s ravnim rubovima, dočim je u drugoj kvadratna relacija uzrok *zakrivljenosti*.

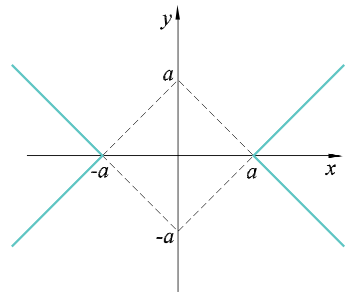
Jednako kao što je jednadžbom $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ određena kružnica sa središtem u točki $S(p, q)$ i promjerom $2r$, tako je jednadžbom $|x - p| + |y - q| = a, a > 0$ zadan kvadrat sa središtem u točki $S(p, q)$ i dijagonalom duljine $2a$.





Razmotrimo sada relaciju oblika

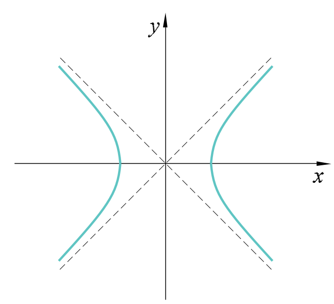
$$|x| - |y| = a, \quad a > 0.$$



Odmah uočavamo da je i ova relacija *parna* pa će stoga koordinatne osi biti osi simetrije i njezina grafa. To znači da je dovoljno crtati dio grafa u prvom kvadrantu, a cijeli graf potom ćemo dobiti uzastopnim zrcaljenjem prema koordinatnim osima.

Za $x \geq 0$ i $y \geq 0$ imamo $x - y = a$ i crtamo odgovarajući polupravac u prvom kvadrantu.

Dalje postupamo onako kako smo to protumačili.

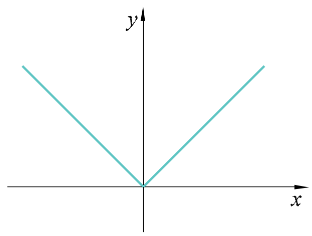


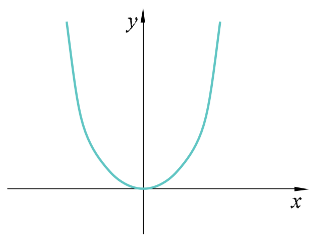
Slika podsjeća na hiperbolu čija je jednadžba oblika $x^2 - y^2 = a^2$. To i nije neobično jer se u oba slučaja radi o pozitivnoj razlici dvaju pozitivnih realnih brojeva, pri čemu je veza u prvom slučaju linearna, pa su dijelovi grafa polupravci, a drugom je kvadratna, što proizvodi zakrivljenost.

Na ovaj smo način upotpunili slijed razmišljanja što smo načeli usporedbom jednakosti $|x| + |y| = a$ i $x^2 + y^2 = r^2$.

Neka čitatelj sada sam prikaže grafički relacije $|x| - |y| = a, a < 0$ i $x^2 - y^2 = -a^2$ i neka pokuša provesti usporedbu na način sličan dvama prethodnim.

Naša ćemo razmatranja protegnuti i na usporedbu relacija što su zadane jednadžbama $y = |x|$ te $y = x^2$. Oba grafa ovih relacija smještena su u poluravnini $y \geq 0$, a os simetrije im je koordinatna os y. (Zašto?) Graf prve unija je dvaju polupravaca $y = x, x \geq 0$ i $y = -x, x \leq 0$, to je uostalom graf funkcije $f(x) = |x|$. Graf druge je parabola.



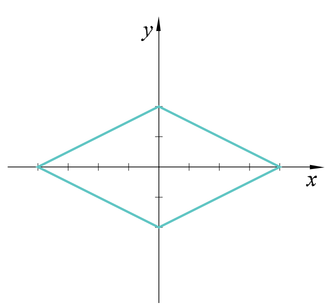


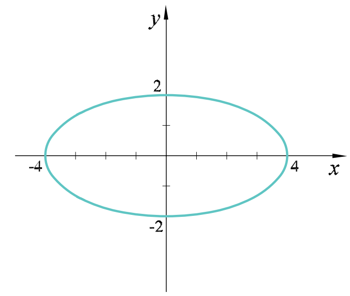
Treba li uopće komentara usporedbi ovih dviju relacija?

Čitateljima i opet prepuštamo, sada vjerujemo, jednostavan zadatak neka nacrtaju i usporede grafove relacija $|y| = x$ i $y^2 = x$.

Još nam u cjelini razmatranja nedostaje elipsa. A i ona ima svoju usporednicu, jednako kao i kružnica, hiperbola i parabola.

Na dva crteža prikazani su graf relacije $|x| + 2|y| = 4$ i graf elipse $x^2 + 4y^2 = 16$. Oni ukazuju na analogiju između romba $a|x| + b|y| = c$, gdje su a, b i c pozitivni brojevi i elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.



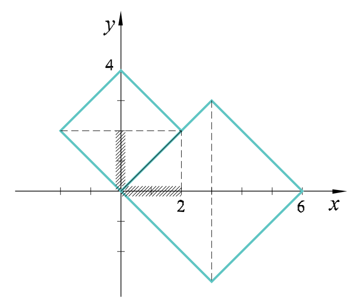


I sada pogledajmo dva primjera u kojima ćemo primijeniti grafove prethodnih relacija s apsolutnim vrijednostima:

Primjer 2. Riješimo sustav jednadžbi:

$$|x| + |y - 2| = 2$$
$$|x - 3| + |y| = 3.$$

Je li ovaj sustav razumno rješavati bilo kako drukčije nego grafički?

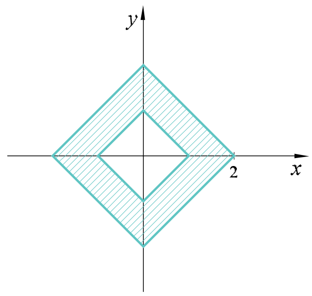


Dvjema zadanim jednadžbama zadana su dva kvadrata, jedan sa središtem u točki $(0, 2)$ i dijagonalom duljine 4, drugi ima središte u točki $(3, 0)$ i dijagonalu duljine 6.

Ti su kvadrati dobiveni translacijama kvadrata $|x| + |y| = 2$ i $|x| + |y| = 3$, prvi je translatiran u pozitivnom smjeru po osi y za 2, a drugi u pozitivnom smjeru po osi x za 3.

Koordinate sjecišta ovih dvaju kvadrata čine uređene parove realnih brojeva koji su rješenja zadanog sustava jednadžbi. Vidimo da manji kvadrat dira veći uzduž cijele jedne svoje stranice, a to znači da je rješenje sustava skup uređenih parova tipa (x, x), gdje je $x \in [0, 2]$.

Primjer 3. Sustavom nejednadžbi $|x|+|y| \geq 1$ i $|x|+|y| \leq 2$ određen je izvjesni skup točaka u koordinatnoj ravnini. Kolika je površina tog skupa točaka?

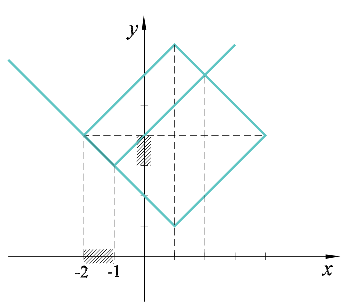


Odmah možemo zaključiti kako je zadani skup točaka presjek vanjštine kvadrata $|x|+|y|=1$ i nutrine kvadrata $|x|+|y|=2$. Stoga je površina lika jednaka razlici površina dvaju kvadrata, jednoga s dijagonalom duljine 4, i drugoga s dijagonalom duljine 2:

$$P = 8 - 2 = 6.$$

Primjer 4. Riješimo sustav jednadžbi:

$$y - |x+1| = 3$$
$$|x-1| + |y-4| = 3.$$



Grafički prikaz prve jednadžbe je graf funkcije $f(x) = |x|$ translatiran tako da mu vrh dospije u točku $(-1, 3)$. Drugom jednadžbom određen je kvadrat sa središtem u točki $(1, 4)$ i s dijagonalama duljine 6.

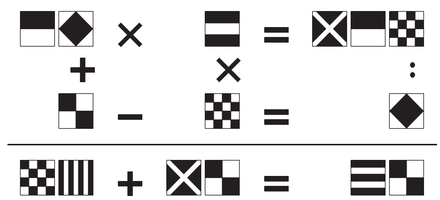
Sa slike uočavamo rješenje sustava jednadžbi.

To su svi takvi uređeni parovi (x, y) realnih brojeva za koje je $x \in [-2, -1]$, te $y = -x + 2$. Tome valja dodati još i uređeni par $(2, 6)$ koji se dobije kao rješenje sustava jednadžbi $-x + y = 4$ i $x + y = 8$.

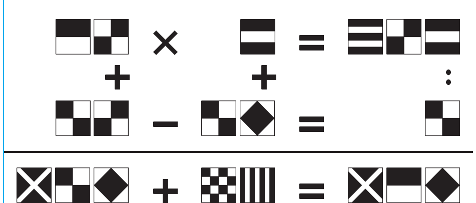
* * *

Zamijenite simbol odgovarajućom znamenkom!

15.



16.



* * *

Rješenja iz prošlog broja:

13.

$$\begin{array}{rcrcr} 2 & \times & 444 & = & 888 \\ + & & : & & - \\ 23 & \times & 37 & = & 851 \\ \hline 25 & + & 12 & = & 37 \end{array}$$

14.

$$\begin{array}{rcrcr} 2 & \times & 20 & = & 40 \\ \times & & \times & & + \\ 292 & + & 12 & = & 304 \\ \hline 584 & - & 240 & = & 344 \end{array}$$