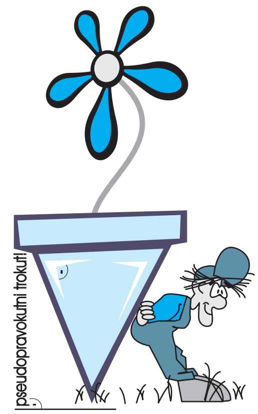


Neke osobitosti pseudopravokutnog trokuta

Anđelko Marić, Sinj

Ovaj članak je nastavak članka *Važnost dokaza obrata poučka*, objavljenog u prošlom broju MŠ-a i s tim člankom čini cjelinu. Zato se preporuča čitatelju, ako nije pročitao taj članak, da to učini prije čitanja ovog teksta.

U tom je članku pokazano da za pravokutni i za pseudopravokutni trokut vrijedi:

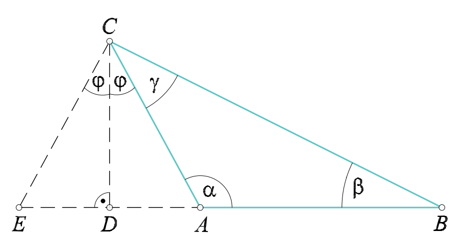
$$a^2 + b^2 = 4R^2. \qquad (1)$$

Isto je tako pokazano da, ako za trokut vrijedi (1), tada je trokut ili pravokutan ili pseudopravokutan.

Pokažimo da još jedan poučak koji vrijedi za pravokutni trokut, vrijedi u potpuno istom izričaju i za pseudopravokutni trokut.

Poučak. *Ako je D nožište visine spuštene iz vrha C (pseudo)pravokutnog trokuta ABC u kojem je* $|\alpha \pm \beta| = 90°$, *tada vrijedi* $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$.

Dokaz. Ako je trokut pravokutan, s pravim kutom pri vrhu C, tada je to poznati **Euklidov poučak** koji se već dugo ustalio u srednjoškolskim programima, gdje se redovito dokazuje. Zato ga ovdje nećemo dokazivati.



Sl. 1.

Dokažimo da taj poučak vrijedi i za pseudopravokutni trokut. Neka je, uz ostale oznake kao na sl. 1., $\alpha - \beta = 90°$. Označimo li $\varphi = \sphericalangle ACD$, tada je $\alpha = 90° + \varphi$

(poučak o vanjskom kutu trokuta), a odatle $\varphi = \alpha - 90^\circ = \beta$. Neka je E točka na pravcu AB uzeta tako da je D polovište dužine $\overline{EA}$. Tada je trokut EAC jednakokračan i $\sphericalangle DCE = \varphi = \beta$. Zato je

$$\begin{aligned}\sphericalangle BCE &= \gamma + \varphi + \varphi = \gamma + \beta + \alpha - 90^\circ \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

Vidimo da je trokut EBC pravokutan, a dužina $\overline{CD}$ visina tog trokuta iz vrha pravog kuta. Zato možemo na taj trokut primijeniti Euklidov poučak i dobijemo:

$$|CD| = \sqrt{|ED| \cdot |BD|} = \sqrt{|AD| \cdot |BD|},$$

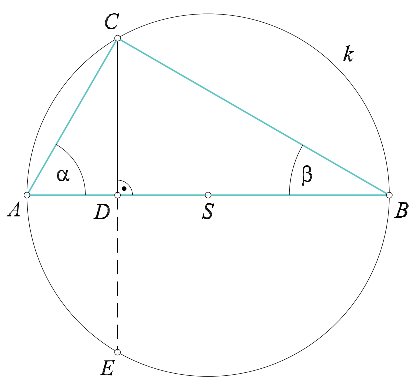
čime je tvrdnja poučka dokazana.

Dokažimo da vrijedi:

Obrat poučka. *Ako je D nožište visine trokuta ABC spuštene iz vrha C i ako je $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$, tada je trokut pravokutan ili pseudopravokutan.*

Dokaz. Razlikujemo opet dva slučaja.

1) Kutovi trokuta α i β su šiljasti:



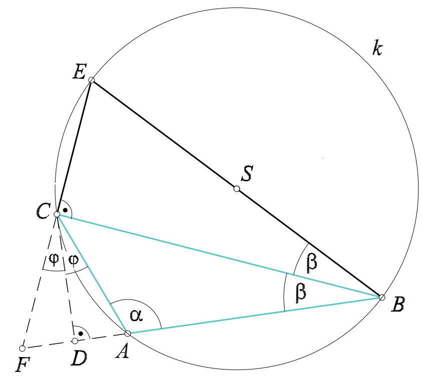
Sl. 2.

Vidimo da točka D pripada dužini $\overline{AB}$, (sl. 2.). Neka je E točka u kojoj pravac CD siječe kružnicu k opisanu promatranom trokutu. Potencija točke D s obzirom na kružnicu k iznosi

$$|CD| \cdot |ED| = |AD| \cdot |BD|.$$

Kako je po pretpostavci obrata poučka $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$, to je $|ED| = |CD|$. Budući je $\overline{BD} \perp \overline{CE}$ i $|CD| = |ED|$, to je $\overline{BA}$ simetrala tetive $\overline{CE}$. Zato središte kružnice k pripada stranici $\overline{AB}$, zbog čega je, po Talesovu poučku, trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.

2) Jedan od kutova α ili β je tup, na primjer α, kao na sl. 3.



Sl. 3.

Neka je k kružnica opisana trokutu ABC, a E druga točka promjera $\overline{BE}$, tada je $\sphericalangle ECB = 90^\circ$. Ako je F sjecište pravaca EC i BA, tada je trokut FBC pravokutan i vrijedi

$$|CD|^2 = |FD| \cdot |BD|,$$

a odatle je zbog pretpostavke $|FD| = |AD|$. Vidimo da je dužina $\overline{CD}$ ujedno visina i težišnica trokuta ACF. Zato je

$$\begin{aligned}&\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCF = \varphi, \\ &\sphericalangle CFA = \sphericalangle FAC = 180^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Kako je $\sphericalangle BCF = 90^\circ$, to je $\sphericalangle FBC + \sphericalangle CFB = 90^\circ$, odnosno $\beta + 180^\circ - \alpha = 90^\circ$, to jest $\alpha - \beta = 90^\circ$, što znači da je trokut pseudopravokutan.

Da smo uzeli da je kut β tupi, dobili bismo $\beta - \alpha = 90^\circ$, u svakom je slučaju $|\alpha - \beta| = 90^\circ$. Time je obrat poučka u potpunosti dokazan.

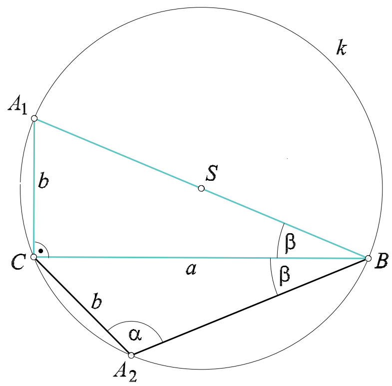
Dokažimo još jednu zanimljivu tvrdnju za pravokutni i pseudopravokutni trokut.

Tvrdnja. *Za svaki pravokutni trokut A_1BC koji nije jednakokračan i kojem su katete $|BC| = a$, $|CA_1| = b$ i jedan od kutova nasuprot zadanim stranicama, na primjer*

$\sphericalangle A_1BC = \beta = 45^\circ$, *postoji pseudopravokutni trokut* A_2BC *kojem je* $|BC| = a$, $|CA_2| = b$, $\sphericalangle A_2BC = \beta$.

Oba tako definirana trokuta imaju polumjere opisanih kružnica jednakih duljina, pa zato za oba ta trokuta vrijedi formula (1).

Tako određen par trokuta nazivamo **pridruženi Pitagorini trokuti**. Dokaz provedimo uz oznake kao na sl. 4.



Sl. 4.

Dokaz. Neka je $\overline{A_1B}$ bilo koji promjer kružnice $k(S; R)$ i C točka te kružnice takva da je $\sphericalangle A_1BC = \beta < 45^\circ$. Trokut A_1BC je po Talesovu poučku pravokutan i vrijedi

$$|BC|^2 + |CA_1|^2 = |A_1B|^2$$

ili

$$a^2 + b^2 = 4R^2. \qquad (1)$$

Neka je A_2 točka kružnice k tako uzeta da je $\overline{BC}$ simetrala $\sphericalangle A_1BA_2$. Zato je $\sphericalangle A_1BC = \sphericalangle A_2BC = \beta$ i zbog toga $|CA_2| = |CA_1| = b$. Iz svega zaključujemo da za ta dva trokuta vrijedi (1) i oni su pridruženi Pitagorini trokuti. Time je postavljena tvrdnja dokazana.

Napomenimo još jednu činjenicu koja neposredno slijedi iz definicije pridruženih Pitagorinih trokuta.

Ako su α, β *i* 90°, $\alpha \neq \beta$, *kutovi pravokutnog trokuta, tada su kutovi pridruženog pseudopravokutnog trokuta* φ, $|\alpha - \beta|$ *i* $90^\circ + \varphi$, *gdje je* $\varphi = \min\{\alpha, \beta\}$.

Na kraju, navedimo još jedan poučak koji vrijedi za pseudopravokutni trokut.

Poučak. *Ako su poznate duljine dviju stranica trokuta, tada se u općem slučaju ne može odrediti duljina treće stranice. Međutim, to se može učiniti i za pravokutni trokut i za pseudopravokutni trokut.*

Ako za kutove trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$ *(pravokutni trokut), tada za duljine stranica trokuta vrijedi* $c^2 = a^2 + b^2$.

Ako za kutove trokuta vrijedi $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ *(pseudopravokutni trokut), tada za duljine stranica trokuta vrijedi:*

$$c^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2},$$

ili

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Dokaz ovog poučka, koji ne sprovodimo zbog ograničenosti prostora, čitatelj može naći u knjizi: A. Marić, *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1996.; zad. 2.43.

Zadaci za vježbu

1. Dva Pitagorina trokuta imaju jednake duljine dviju stranica a, b, $a > b$ i jednake kutove β nasuprot manjim stranicama. Dokažite da za treći par stranica vrijedi:

$$\frac{c_2}{c_1} = \cos 2\beta.$$

(*Naputak:* promatraj trokut A_1BA_2 na sl. 4.)

2. Zadana su dva trokuta duljina stranica: $a_1 = 5$, $b_1 = 12$, $c_1 = 13$; $a_2 = 5$, $b_2 = 12$, $c_2 = \frac{119}{13}$. Dokažite da su to pridruženi Pitagorini trokuti.
(Zadatak se može riješiti na više načina. Jedan od njih je: dovoljno je dokazati da je $2R_2 = c_1$.)

3. Duljine kateta pravokutnog trokuta su 8 i 15. Izračunajte duljine stranica njemu pridruženog pseudopravokutna trokuta. Izračunajte polumjer kružnice opisane pseudopravokutnom trokutu i pokažite da vrijedi (4).

(Nastavak na str. 189.)

Nastavak sa str. 178.

4. *Riješite trokut ako je zadano: a, b i α, uz uvjete $a < b$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Pokažite da zadatak ima dva rješenja i da su to pridruženi Pitagorini trokuti.*
Provjerite da su za $a = 5$, $b = 12$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ to trokuti iz zadatka 2.

5. *Neka su L i M redom točke u kojima simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta iz vrha C trokuta ABC sijeku pravac AB. Ako je $|CL| = |CM|$, dokažite da je $|AC|^2 + |BC|^2 = 4R^2$, gdje je R duljina polumjera kružnice opisane trokutu ABC.*

Rješenje. Nadopunimo sl. 1. točkama L i M. Kako su simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta iz istog vrha trokuta međusobno okomite, to je trokut MLC jednakokračan i pravokutan. Zato je $\sphericalangle LCD = \frac{\gamma}{2} + \varphi = 45^\circ$ i $\varphi + \gamma = 90^\circ - \beta$. Iz ovih jednakosti dobijemo $\alpha - \beta = 90^\circ$, što znači da je promatrani trokut pseudopravokutan i vrijedi $a^2 + b^2 = 4R^2$, što je tvrdnja zadatka.

(*Napomena.* Ovaj zadatak za drugi razred na Državnom natjecanju učenika srednjih škola Republike Hrvatske, Supetar '99., potaknuo je zamisao da se napišu ova dva članka, koji su prvotno zamišljeni kao jedan članak.)