# Verižni (lančani) račun

Ksenija Pukšec* Josip Matejaš†

22. travnja 2007.

## 1 Uvod

Verižni (lančani) račun je postupak nalaženja veze između dviju veličina koje su međusobno vezane nizom proporcionalnih veličina. To je jedan od elementarnih računa gospodarske matematike (vidjeti [2]) koji se provodi po vrlo jednostavnim pravilima, a ima široku primjenu. Može se koristiti za preračunavanje mjernih jedinica, pa njime jednostavno uspoređujemo količine, mase, volumene, duljine, cijene, novčane vrijednosti itd. (vidjeti [1], [3]), a koje su izražene jedinicama iz različitih mjernih sustava. Neke od tih primjena navodimo u ovom radu.

## 2 Pravila postavljanja lančanog računa

Pravila postavljanja i postupak provođenja lančanog računa objašnjavamo na slijedećem slikovitom primjeru.

**Primjer 1** *Ako 5 banana ima masu kao 8 jabuka, 20 limuna kao 12 naranči, 4 kruške kao 10 šljiva, 5 limuna kao 2 banane te 6 jabuka kao 9 krušaka, koliko šljiva ima masu kao jedna naranča?*

Čitajući zadatak vidimo da je dosta "zapetljan", tako da nije odmah jasno odakle početi. Ako navedeno voće označimo njegovim početnim slovom ($b$, $j$, $l$, $n$, $k$, $š$), iz uvjeta zadatka imamo

$$5b = 8j \quad \Rightarrow \quad b = \frac{8}{5}\,j \tag{1}$$

*Studentica i demonstratorica iz matematike na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu (puksec@gmail.com).

†Docent na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu (josip.matejas@kr.htnet.hr).

$$20l = 12n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{20}{12}\, l \tag{2}$$

$$4k = 10š \quad \Rightarrow \quad k = \frac{10}{4}\, š \tag{3}$$

$$5l = 2b \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{5}\, b \tag{4}$$

$$6j = 9k \quad \Rightarrow \quad j = \frac{9}{6}\, k\ . \tag{5}$$

Koristeći sada dobivene relacije slijedećim redom: (2), (4), (1), (5) i (3), dobivamo

$$n \;=\; \frac{20}{12}\, l \;=\; \frac{20}{12} \cdot \frac{2}{5}\, b \;=\; \ldots \;=\; \frac{20 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{12 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}\, š \;=\; 4š\,, \tag{6}$$

dakle, jedna naranča ima masu kao i 4 šljive.
U skladu sa relacijom (6), uvjete zadatka možemo zapisati i ovako

$$\begin{array}{r|r} x\ š & 1\ n \\ 12\ n & 20\ l \\ 5\ l & 2\ b \\ 5\ b & 8\ j \\ 6\ j & 9\ k \\ 4\ k & 10\ š \end{array}$$

a što predstavlja zapis u obliku *lančanog računa.* Iz navedenog zapisa i jednakosti (6), lako uočavamo sljedeća pravila postavljanja lančanog računa:

1. Lančani račun započinje pitanjem (kojim je definirana nepoznanica).
2. Novi redak lančanog računa počinje onom veličinom (jedinicom) kojom je prethodni redak završio.
3. Račun završava onom veličinom (jedinicom) kojom je i započeo.
4. Nepoznanicu izračunamo kao kvocijent umnoška desne i umnoška preostalih članova lijeve strane.

Iz pravila 2 i 3 vidimo smisao naziva verižni (lančani) račun. Primijetimo da je pravilo 4 ekvivalentno činjenici da je umnožak desne strane jednak umnošku lijeve strane.

# 3 Primjene

Od vrlo raznolikih primjena lančanog računa navodimo neke od njih, uglavnom ekonomskog karaktera. Počnimo slijedećim praktičnim primjerom.

**Primjer 2** *Prilikom geološkog ispitivanja novog nalazišta aluminijeve rude dobiveni su slijedeći podaci. Iz 40 kg rude u prvoj fazi prerade dobije se 2.15 kg boksita. Kemijskim postupkom u drugoj fazi prerade iz 1.4 kg boksita dobije se 425 g aluminijeva oksida. Elektrolizom u trećoj fazi prerade iz 350 g aluminijeva oksida dobije se 155 g aluminija. Da li je ovo nalazište isplativo za korištenje ako znamo da je isplativa prerada one rude koja sadrži bar 1% aluminija?*

Sve količine izražavamo u gramima. Postavljamo pitanje: koliko je rude potrebno za proizvodnju jednog grama aluminija? Imamo

$$\begin{array}{c|c} x \text{ rude} & 1 \text{ al.} \\ 155 \text{ al.} & 350 \text{ al.oks.} \\ 425 \text{ al.oks.} & 1\,400 \text{ boks.} \\ 2\,150 \text{ boks.} & 40\,000 \text{ rude} \end{array}$$

pa je

$$x = \frac{1 \cdot 350 \cdot 1400 \cdot 40000}{155 \cdot 425 \cdot 2150} \approx 138.39\ .$$

Dakle, za 1 gram aluminija potrebno je nešto više od 138 grama rude a to znači da je sadržaj aluminija manji od 1% pa nalazište nije isplativo.
Određenim poopćavanjem uvjeta na koje se lančani račun primijenjuje, dolazimo do sljedećeg teorijskog primjera.

**Primjer 3** *Zadan je linearni sustav*

$$a_k x_k = b_{k+1} x_{k+1}, \quad a_k, b_{k+1} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ nepoznanice. Za zadane indekse $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ odredite $\alpha_{ij}$ takav da vrijedi $x_i = \alpha_{ij} x_j$.*

Ako je $i = j$ tada je očito $\alpha_{ij} = 1$. Ako je $i < j$ tada imamo

$$\begin{array}{c|c} \alpha_{ij} x_j & x_i \\ a_i x_i & b_{i+1} x_{i+1} \\ a_{i+1} x_{i+1} & b_{i+2} x_{i+2} \\ \cdots & \cdots \\ a_{j-1} x_{j-1} & b_j x_j \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{ij} = \frac{b_{i+1} b_{i+2} \cdot \ldots \cdot b_j}{a_i a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_{j-1}} = \frac{\prod\limits_{k=i+1}^{j} b_k}{\prod\limits_{k=i}^{j-1} a_k}\ ,$$

gdje $\prod$ označava operator umnoška.
Za $i > j$ u dobivenoj relaciji indeksima $i$ i $j$ zamijenimo mjesta te uvažimo da je $\alpha_{ij} = 1/\alpha_{ji}$. Vratimo se opet praktičnim primjenama.

**Primjer 4** *Jedno zagrebačko uvozno-izvozno poduzeće uvozi 2500 litara šampanjca iz Francuske za 15000 EUR. Odredite cijenu tog šampanjca u Zagrebu ako poduzeće za 1 EUR plaća 7.42 HRK, transportni troškovi su 8% a carina 15% nabavne cijene, marža je 5% tako dobivene veleprodajne cijene a PDV je 22%.*

Jednostavno slijedimo pravila lančanog računa

$$\begin{array}{r|l} x\ HRK & 1\ l \\ 2500\ l & 15000\ EUR \\ 1\ EUR & 7.42\ HRK \\ 100\ HRK & 123\ HRK \text{ (t.t. i carina)} \\ 100\ HRK & 105\ HRK \text{ (marža)} \\ 100\ HRK & 122\ HRK \text{ (PDV)} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 70.15\ HRK.$$

Primijetimo da smo, po pravilima, račun mogli završiti nakon trećeg retka a zatim primjeniti postotni račun (tri puta). Međutim, kao što vidimo, sve se to može elegantno ukorporirati u sam lančani račun u skladu s njegovim pravilima. Tako npr. obračunati maržu od 5% znači da svakih 100 novčanih jedinica ($HRK$) cijene sada postaje 105 itd.
Preračunavanje mjernih i novčanih jedinica jedna je od značajnih primjena lančanog računa. Takav je i slijedeći primjer.

**Primjer 5** *Ako za 2297 kuna i 10 lipa dobijemo 380 USD, za 4059 kuna i 22 lipe dobijemo 550 EUR a za 6300 EUR trebamo platiti 7665 USD, koliko EUR možemo dobiti za 9999 kuna i 99 lipa?*

Primijetimo da, prema uvjetima zadatka, imamo dvije mogućnosti:

1. Za $HRK$ kupujemo $EUR$ :

$$\begin{array}{r|l} x_1\ EUR & 9999.99\ HRK \\ 4059.22\ HRK & 550\ EUR \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 1354.94\ EUR.$$

2. Za $HRK$ kupujemo $USD$ a zatim za $USD$ kupujemo $EUR$ :

$$\begin{array}{r|l} x_2\ EUR & 9999.99\ HRK \\ 2297.10\ HRK & 380\ USD \\ 7665\ USD & 6300\ EUR \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = 1359.66\ EUR.$$

Vidimo da smo, zbog razlike u tečaju pojedinih deviza, dobili različite rezultate pa možemo birati povoljniju mogućnost a to je za nas 2. Takav postupak naziva se *arbitraža deviza i roba*: razlike u cijenama roba i tečaju deviza na različitim tržištima možemo iskoristiti u svrhu povoljnijeg podmirenja dugovanja ili potraživanja, jeftinije kupnje ili skuplje prodaje te ostvarivanja bolje diferencije (zarade) itd. Tu je jedna od najznačajnih primjena lančanog računa u ekonomiji. Pokažimo arbitražu na još nekim primjerima.

**Primjer 6** *Kako hrvatski turist može najpovoljnije kupiti kameru u Budimpešti čija je cijena* 150 000 *HUF, ako*
*u Budimpešti notira deviza Beča 275 a deviza Zagreba 3400,*
*dok u Zagrebu notira deviza Budimpešte 2.80 a deviza Beča 7.33 ?*

Svaka deviza je novac koji na određenom tržištu ima određenu cijenu koju nazivamo *tečaj*. Ako je tečaj zadan (poznat) tada kažemo da deviza *kotira* ili *notira* na tom tržištu. Notiranje može biti izravno (broj jedinica domaće valute za 1 ili 100 jedinica strane) koje je na tržištima najčešće ili posredno (broj jedinica strane valute za 1 ili 100 jedinica domaće). Tako uvjeti zadatka znače da je
u Budimpešti: 275 $HUF = 1\ EUR$, 3400 $HUF = 100\ HRK$, odnosno
u Zagrebu: 2.80 $HRK = 100\ HUF$, 7.33 $HRK = 1\ EUR$.
Vidimo da hrvatski turist ima tri mogućnosti:

1. Promjena $HRK$ u $HUF$ u Budimpešti

$$\begin{array}{r|l} x_1\ HRK & 150\,000\ HUF \\ 3400\ HUF & 100\ HRK \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 4411.76\ HRK.$$

2. Kupnja $EUR$ u Zagrebu i promjena $EUR$ u $HUF$ u Budimpešti

$$\begin{array}{r|l} x_2\ HRK & 150\,000\ HUF \\ 275\ HUF & 1\ EUR \\ 1\ EUR & 7.33\ HRK \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = 3998.18\ HRK.$$

3. Kupnja $HUF$ u Zagrebu

$$\begin{array}{r|l} x_3\ HRK & 150\,000\ HUF \\ 100\ HUF & 2.8\ HRK \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = 4200\ HRK.$$

Za turista je najpovoljnija 2. mogućnost. Uočimo osnovno značenje dobivenih rezultata: u svakoj od ove tri mogućnosti hrvatski turist treba platiti različit iznos $HRK$, dok trgovac u Budimpešti uvijek dobiva 150 000 $HUF$. Ne radi se tu o nikakvoj prevari ili smicalici, dobivene razlike su posljedica razlika u tečaju pojedinih deviza na različitim tržištima. Očito je da u praksi, ako promatramo i neke druge valute, imamo još više mogućnosti.

**Primjer 7** *Gdje će uvozno-izvozna tvrtka iz Zagreba kupiti a gdje prodati aluminij ako je cijena aluminija*

*u Sydney 22.85 AUD za 25 lb (lb = pound = 453.6 g),*
*u New Yorku 1580 USD za 1 l.t. (l.t. = long tone = 1016 kg),*
*u Osaki* 110 000 *JPY za 150 kann (kann = 3.75 kg),*

*te ako Zagreb notira*
*devizu Sydney 4.38, devizu New York 5.76 i devizu Osaka 4.64,*

*a troškovi transporta su*
*Sydney 16% , New York 15% i Osaka 14% ?*

Vidimo da su cijene izražene u različitim valutama i različitim količinskim jedinicama. Kako nije dana količina aluminija koju treba kupiti (prodati), izabiremo je proizvoljno. Pitamo se: koliko $HRK$ treba tvrtka izdvojiti za neku fiksnu količinu aluminija (npr. 1000 kg)? Imamo tri mogućnosti:

1. Kupnja (prodaja) aluminija u Sydney

$$\begin{array}{r|l} x_1\ HRK & 1000\ kg \\ 0.4536\ kg & 1\ lb \\ 25\ lb & 22.85\ AUD \\ 1\ AUD & 4.38\ HRK \\ 100\ HRK & 116\ HRK \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 10\,237.77\ HRK.$$

2. Kupnja (prodaja) aluminija u New Yorku

$$\begin{array}{r|l} x_2\ HRK & 1000\ kg \\ 1016\ kg & 1580\ USD \\ 1\ USD & 5.76\ HRK \\ 100\ HRK & 115\ HRK \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 10\,301.10\ HRK.$$

3. Kupnja (prodaja) aluminija u Osaki

$$\begin{array}{r|l} x_3\ HRK & 1000\ kg \\ 3.75\ kg & 1\ kann \\ 150\ kann & 110\,000\ JPY \\ 100\ JPY & 4.64\ HRK \\ 100\ HRK & 114\ HRK \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 10\,344.11\ HRK.$$

Za tvrtku je najpovoljnija kupnja u Sydney a prodaja u Osaki. Pri tome se ostvaruje diferencija (zarada) od $10344.11 - 10237.77 = 106.34$ $HRK$ na svakih 1000 kg. Na temelju te diferencije procjenjujemo isplativost ulaska u navedeni uvozno-izvozni posao.
Na kraju napomenimo, a što je jasno iz navedenih primjera, da se kod arbitraže koju provodimo lančanim računom u svim razmatranim mogućnostima, u svrhu direktne usporedbe, treba postaviti *isto pitanje*.

# 4 Zadaci za vježbu

1. Srednja udaljenost Mjeseca od Zemlje je 384 400 km. Ako je 1 px (pixel) = 263.6 $\mu$m, 1 ft (stopa) = 12 in (inch) = 30.48 cm, 1 mi (milja) = 1609 km te 1 ls (svjetlosna sekunda) = 299 800 km, izrazite navedenu udaljenost u pixelima, inchima, miljama i svjetlosnim sekundama.

   RJEŠENJE: 1 458 270 106 222 px = 15 133 858 268 in = 238 906.153 mi = 1.2822 ls.

2. Ako 50 AUD vrijedi kao 4520 JPY, 120 GBP kao 255 CAD a 10000 JPY kao 45 GBP, koliko CAD vrijedi 100 AUD ?

   RJEŠENJE: 86.445 CAD.

3. Pas, mačak i miš ugledaše komad sira i istovremeno pojuriše prema njemu. Ako je pas udaljen od sira 27 svojih skokova, mačak 23 svoja skoka a miš 50 svojih skokova, tko će od njih prvi ugrabiti sir? Znamo da 3 skoka psa imaju istu duljinu kao i 5 skokova mačka a 2 mačja skoka iste su duljine kao i 9 skokova miša. Znamo također da je mačak dvostruko brži od miša a pas dvostruko brži od mačka.

   RJEŠENJE: Udaljenost od sira izrazimo u mišjim skokovima: pas 202.5, mačak 103.5, miš 50. S obzirom na njihove brzine, prvi dolazi miš (onda pas a zatim mačak).

4. Pretpostavimo da uvoznik iz New Yorka treba platiti njemačkom izvozniku iz Frankfurta 1 000 000 EUR za uvoz automobila. U New Yorku notira deviza Londona 1.5918 a deviza Frankfurta 1.1163, dok u Frankfurtu notira deviza Londona 1.4269 a deviza New Yorka 0.8976. Ispitajte na koje sve načine uvoznik može podmiriti svoj dug te koji mu je od tih načina najpovoljniji?

   RJEŠENJE: Kupnja EUR u New Yorku (1 116 300 USD), kupnja GBP u New Yorku i konverzija u EUR u Frankfurtu (1 115 565.21 USD), konverzija USD u EUR u Frankfurtu (1 114 082 USD) što je i najpovoljnije.

5. Gdje će tvrtka iz New Yorka kupiti a gdje prodati pšenicu ako pšenica kotira u Bonnu 22.74 EUR za 100 kg, u Stockholmu 1928.25 SEK za 1 m.t. (m.t. = metric tone = 1000 kg), u Londonu 120.81 GBP za 1 e.t. (e.t. = english tone = 1016 kg), a New York notira devizu Bonna 0.9225, devizu Stockholma 0.1079, devizu Londona 1.7050, dok su transportni troškovi iz Bonna 7% , iz Stockholma 3% te iz Londona 4% ?

   RJEŠENJE: Za 100 kg pšenice plaća se: u Bonnu 22.45 USD, u Stockholmu 21.43 USD, u Londonu 21.08 USD. Kupnja u Londonu a prodaja u Bonnu (diferencija 1.37 USD na svakih 100 kg pšenice).

# Literatura


[1] M. Babić, A. Babić, (2003) *Međunarodna ekonomija*, MATE, Zagreb.

[2] B. Relić, (2002) *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb.

[3] B. Šego, (2005) *Matematika za III razred ekonomskih škola*, Neodidacta, Zagreb.