PRILOG KRITERIJIMA DJELJIVOSTI BROJEVA

***Dr. sc. Milorad Tomić, Bjelovar, Republika Hrvatska***

***Sažetak:*** *U radu se u skupu prirodnih brojeva opisuje jedan nestandardan kriterij djeljivosti brojevima manjim od 10.*

*Kriterij je podesan za ispitivanje djeljivosti brojevima* $m \in \{2,3,4,...,9\}$*, pa tako i za, što je rijetko u standardnim algoritmima, djeljivost brojem 7.*

*Ovako uvedena pravila temeljena su na postavkama uvedena i dokazana teorema. Pravila moraju biti pojmovno istoznačna (ekvivalentna) sa postojećim kriterijima, a što je u radu i dokazano.*

***Ključne riječi:*** *djeljivost brojeva, teorem o djeljivosti,kriteriji djeljivosti, algoritmi djeljivosti.*

Kažemo da je broj *b*, $b \in N$, *N* skup prirodnih brojeva, djeljiv brojem *m*, $m \in N$, i pišemo $m \mid b$ ako je ostatak pri dijeljenju brojeva $b : m$ jednak nuli. Možemo to pisati i ovako: $b : m = p$ ili $b = m \cdot p$, $p \in N$. Ispitivanje djeljivosti (prirodnih) brojeva ustvari se svodi na izračunavanje količnika *p*. Treba li npr. ispitati istinitost tvrdnje da li $4 \mid 92$, tj. da li 4 bez ostatka dijeli 92, najlakše je, pa i pomoću džepnog računala, izračunati da je 92 : 4 = 23 Pošto je ostatak pri ovoj diobi jednak nuli, odgovor je potvrdan. A da li vrijedi da $5 \mid 183$? Ne, jer je $183 : 5 = 36 + \frac{3}{5}$.

Ispitujemo li pak da li je npr. broj 23 478 231 617 djeljiv brojem 8, prijašnji način određivanja djeljivosti, napose bez uporabe strojnih pomagala, nije praktičan. Već odavno bio je to jedan od razloga uvođenja pravila, odnosno kriterija djeljivosti brojeva.

U ovome će se članku opisati jedan nestandardan kriterij djeljivosti prirodnim brojevima manjim od 10.

Neka je u tu svrhu dan prirodan broj *b* zadan u dekadskom brojevnom sustavu zapisan pomoću znamenaka $a_i, i = 0,1,2,...,n$, $a_i \in \{0,1,...,9\}$. Uobičajeni su mu zapis i vrijednost:

(1) $$b = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$$

Izkažimo sada kriterij djeljivosti, nužan za definiranje odgovarajućeg algoritma djeljivosti brojeva!

**TEOREM**. Prirodan broj *b* definiran sa (1) djeljiv je prirodnim brojem *m*, $m < 10$, onda i samo onda ako je broj

(2) $$a_0 + (10-m)a_1 + ... + (10-m)^{n-1} a_{n-1} + (10-m)^n a_n$$

djeljiv brojem *m*.

***Dokaz***. Uz oznaku $d = 10 - m,\ m,k \in N,$ prethodnu tvrdnju možemo pisati u obliku

$$a_0 + a_1 d + ... + a_{n-1} d^{n-1} + a_n d^n = m \cdot k,$$
$$d = 10 - m,\ m,k \in N,$$

odnosno,

(3) $$a_0 = mk - \left(a_1 d + ... + a_{n-1} d^{n-1} + a_n d^n\right).$$

Iz jednakosti (1) i (3) slijedi da je

$$\begin{aligned} b &= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + mk - a_1 d - ... - a_{n-1} d^{n-1} - a_n d^n = \\ &= mk + a_n\left(10^n - d^n\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - d^{n-1}\right) + ... + a_1(10 - d), \end{aligned}$$

odnosno,

(4) $$b = mk + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(10^i - d^i\right).$$

Dijeljenjenjem polinoma ili pak primjenom osnovnih svojstava kongruencija nije teško pokazati da je izraz $10^i - d^i$ djeljiv sa $10 - d$, $i \in N$.

Pošto je $d = 10 - m$, odnosno $m = 10 - d$, to iz jednakosti (3) slijedi da je broj djeljiv $b$ brojem $m$.

Napišimo to ovako:

(5) $$m \mid a_0 + (10-m)a_1 + ... + (10-m)^{n-1} a_{n-1} + (10-m)^n a_n \Rightarrow m \mid \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}.$$

Obrat tvrdnje, tj.

$$m \mid \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} \Rightarrow m \mid a_0 + (10-m)a_1 + ... + (10-m)^{n-1} a_{n-1} + (10-m)^n a_n$$

dokazuje se analognim zaključivanjima obrnutim redosljedom.

Time je teorem dokazan. ■

A da li je kriterij djeljivosti iskazan teoremom dovoljno praktičan? Iz rastava (4) broja $b$ očito je da je taj kriterij za praktičnu primjenu to pogodniji, što je razlika $10 - m$ manja. Naročito je pogodan za slučajeve ispitivanja djeljivosti brojevima $m = 7, m = 8$ i $m = 9$.

Ovako definiran kriterij djeljivosti brojeva brojem $m$, $m < 10$, mora biti ekvivalentan uvjetima djeljivosti brojeva iskazanim uobičajenim pravilima, odnosno kriterijima djeljivosti.
Iz relacije (5) proizlazi da je prirodni broj $b$ djeljiv brojem $m = 9$, $10 - m = 1$, onda i samo onda ako je izraz $a_0 + a_1 + ... + a_n$, a što ustvari predstavlja zbroj njegovih znamenaka, djeljiv brojem 9. Dakle, pokazali smo očitu ekvivalenciju kriterija djeljivosti (5) sa standardnim pravilom.

Prirodni broj djeljiv je brojem 8, $10 - m = 2$, onda i samo onda ako je odgovarajuća vrijednost izraza (5) djeljiva sa 8. Sljedbeno tome, imamo:

$$a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + ... + 2^n a_n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8\left(a_3 + 2a_4 + ... + 2^{n-3} a_n\right).$$

Nije teško pokazati da je broj $b$ djeljiv brojem $m$ ako su brojem $m$ djeljive njegove grupe pribrojnika. U ovome slučaju vrijedi implikacija:

$$8 \mid a_0 + 2a_1 + 4a_2 \wedge 8 \mid 8\left(a_3 + 2a_4 + ... + 2^{n-3} a_n\right) \Rightarrow 8 \mid b,$$

pa se jedan ili više pribrojnika, čija je djeljivost brojem $m$ očita, može ispustiti

Dakle, *puni* kriterij djeljivosti brojem 8 u ovom slučaju možemo *ublažiti* i reći da je dovoljno uzeti prva tri člana gornjeg rastava. Dakle, prirodni broj djeljiv je brojem 8 onda i samo onda ako je izraz oblika $a_0 + 2a_1 + 4a_2$ djeljiv sa 8.

Označimo sada rastav (2) sa:

(6) $$S_{[m]}(b) = a_0 + (10-m)a_1 + ... + (10-m)^n a_n,$$

a njegov skraćeni, tj. modificirani, oblik sa:

$$S_{[m]}^{*}(b).$$

***Primjer 1.*** Treba ispitati da li je broj $b = 87920$ djeljiv brojem 8. Dobiva se:

$$S_{[8]}^{*}(87920) = 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 9 = 40.$$

Primjeni li se algoritam sukcesivno još jednom, dobiva se da je $S_{[8]}^{*}(40) = 0 + 2 \cdot 4 = 8$, te je odgovor potvrdan.

Ponavlja li se na prethodno dobivene vrijednosti rastav (6) $j$ puta, uvodimo sljedeće zapise:

$$S_{[m]}^{2}(b) = S_{[m]}\left(S_{[m]}(b)\right)$$
$$S_{[m]}^{3}(b) = S_{[m]}\left(S_{[m]}^{2}(b)\right)$$
$$..............$$
$$S_{[m]}^{j}(b) = S_{[m]}\left(S_{[m]}^{j-1}(b)\right) \tag{7}$$

Za posljednju jednakost (7) vrijede sljedeće grupe vrijednosti uvedenih parametara:

$$S_{[m]}^{j}(b) = m\,,\quad 5 \le m \le 9,\ j \in N$$
$$S_{[m]}^{j}(b) = \alpha \cdot m\,,\quad 1 < m \le 4,\ \alpha \cdot m < 10,\ \alpha, j \in N\,.$$

Tako je npr.

$$7 \mid b \Rightarrow S_{[7]}^{j_1}(b) = 7 \qquad , \qquad 4 \mid b \Rightarrow S_{[4]}^{j_2}(b) = \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases} \qquad , \qquad 3 \mid b \Rightarrow S_{[3]}^{j_3}(b) = \begin{cases} 3 \\ 6 \\ 9 \end{cases}.$$

Pogodnost algoritma (2) očituje se posebice u njegovoj primjeni pri ispitivanju djeljivosti prirodnog broja brojem 7. U tom slučaju imamo pravilo:

Prirodan broj $b$ definiran sa (1) djeljiv je brojem 7 onda i samo onda ako je brojem 7 djeljiv broj

$$a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + ... + 3^n a_n\,,$$

odnosno ako vrijedi:

$$S_{[7]}^{j}(b) = 7\,.$$

***Primjer 2.*** Vrijedi li da $7 \mid 2415$ ? Sukcesivnom primjenom algoritma (6) dobiva se:

$$S_{[7]}(2415) = 5 + 3\cdot 1 + 9\cdot 4 + 27\cdot 2 = 98 \quad , \quad S_{[7]}(98) = 8 + 3\cdot 9 = 35$$
$$S_{[7]}(35) = 5 + 3\cdot 3 = 14 \quad , \quad S_{[7]}(14) = 4 + 3\cdot 1 = 7\,.$$

Dakle, $S_{[7]}^{4}(2415) = 7$, pa je odgovor potvrdan.

Naravno da se algoritam $S_{[m]}^{j}$ može prekinuti i prije za neko manje $j$, znamo li da je parcijalno dobiveni broj u algoritmu djeljiv brojem $m$. U prethodnom primjeru mogli smo stati već nakon drugog koraka, pošto znamo da je 35 djeljivo sa 7.

Pokažimo na kraju da je algoritam djeljivosti (6) za $m = 2$ ekvivalentan sa uobičajenim kriterijom.

Budući da vrijedi

$$S_{[2]}(b) = a_0 + 8a_1 + 8^2 a_2 + ... + 8^n a_n = a_0 + 8\cdot\left(a_1 + 8a_2 + ... + 8^{n-1} a_n\right)$$

očito je da $2 \mid b$ već kada je njegova posljednja znamenka $a_0$ djeljiva sa 2, tj. ako je $a_0 \in \{0,2,4,6,8\}$, neovisno o drugim znamenkama toga broja.

Ostavljamo za vježbu čitatelju provjeru ekvivalencije algoritma (5) za slučajeve $m = 3, m = 4, m = 5$ i $m = 6$ sa već poznatim kriterijima djeljivosti tim brojevima .

## Literatura:


1. Tomić, M. (2006), *Jedan kriterij djeljivosti brojeva*, Bjelovar (Republika Hrvatska), Bjelovarski učitelj.
2. ***, (1978), *Matematika*, Stručno – metodički časopis, Zagreb, Školska knjiga.