KOSINUSOV PUČAK I ELEMENTARNA SVOJSTVA TROKUTA

Mladen Halapa, *Bjelovar*

U matematičkoj literaturi kosinusov poučak je poznat i kao Carnotov[1] poučak, jer ga je on prikazao u sadašnjem obliku.

Kvadrat duljine jedne stranice trokuta jednak je zbroju kvadrata duljina drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki produkt duljina tih stranica i kosinusa kuta kojeg one određuju:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha , \qquad (1)$$

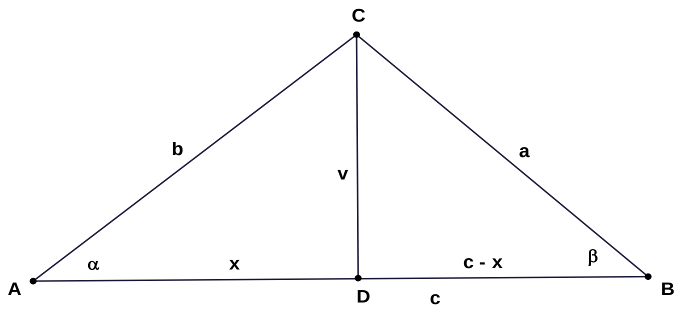
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta , \qquad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma . \qquad (3)$$

Pokazat ćemo tri inačice njegovog dokaza.

Neka je $\alpha \leq 90°$. Iz vrha C nacrtamo visinu $\overline{CD}$ na stranicu $\overline{AB}$. Na slici je

$$|AB| = c, \quad |\mathrm{BC}| = a, \quad |\mathrm{CA}| = b, \quad |\mathrm{CD}| = v, \quad |\mathrm{AD}| = x, \quad |\mathrm{BD}| = c - x.$$



Koristeći Pitagorin poučak, iz pravokutnih trokuta ADC i BDC dobivamo

$$v^2 = |AC|^2 - |AD|^2 = |BC|^2 - |BD|^2 ,$$

$$v^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 ,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Budući da je trokut ADC pravokutan, slijedi

$$x = b \cos \alpha \;\; tj. \;\; a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

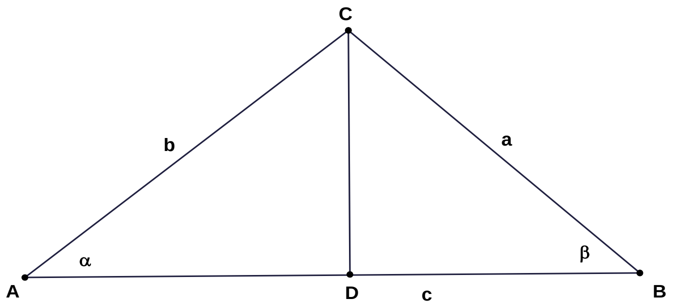
Lako se vidi da za tupokutan trokut vrijedi ista formula. □

U drugoj inačici dokaza koristit ćemo poučak o projekcijama.

Neka je D nožište visine iz vrha C trokuta ABC. Iz pravokutnog trokuta ADC i BDC dobivamo

[1] Lazare Carnot (1753. – 1823.), francuski matematičar

$$|AD| = b\cos\alpha, \quad |\mathrm{BD}| = a\cos\beta.$$



Kako je $c = |AB| = |AD| + |BD|$, imamo

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta, \tag{4}$$

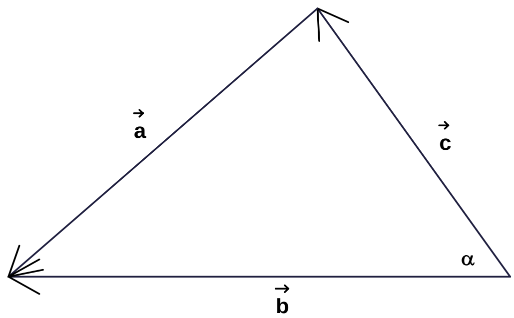
i analogno ostale dvije formule

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma,, \tag{5}$$

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha. \tag{6}$$

Pomnožimo prvu od ovih jednakosti s (–c), drugu s a i treću s (–b), nakon zbrajanja dobivamo (1). Na sličan način dobivaju se preostale dvije jednakosti. □

Vektorski dokaz pomoću skalarnog produkta pratimo s ove slike.



$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c},\ \vec{b} \cdot \vec{c} = bc\cos\alpha.$$

Skalarnim množenjem dobivamo

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left(\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right),$$

odakle se dobiva jednakost (1). Na sličan način dobivaju se i preostale dvije. □

Pomoću kosinusovog poučka mogu se dokazati razna elementarna svojstva tog geometrijskog lika. Zanimljivo je da je s njim ekvivalentan i poučak o sinusima koji glasi:

Duljine stranica trokuta međusobno se odnose kao sinusi nasuprotnih kutova:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

gdje je R polumjer trokuta opisane kružnice.

Dokaz o ekvivalenciji kosinusovog poučka i poučka o sinusima može se pogledati u [1].

Pomoću kosinusovog poučka sada ćemo pokazati neka pravila koja se odnose na stranice i kutove trokuta.

1. *Svaka stranica nedegeneriranog trokuta manja je od zbroja dviju ostalih.*

Pokažimo da je $a < b + c$. Kako je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha < b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2,$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

2. *Svaka stranica trokuta veća je od razlike dviju ostalih.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha > b^2 + c^2 - 2bc = (b - c)^2,$$

odakle slijedi $a > | b - c |$.

3. *Nasuprot većoj stranici je veći kut, tj. ako je $a > b$* onda je $\alpha > \beta$.

Ako je $a > b$, tada zbog $a + b > c$ vrijedi sljedeća nejednakost

$$(a - b) \cdot [(a + b)^2 - c^2] > 0.$$

Daljnje transformacije ove nejednakosti dat će onu koju tražimo:

$$a^3 - b^3 + a^2b - ac^2 - ab^2 + bc^2 > 0, \qquad / \cdot \ (-1)$$

$$\left(ab^2 + ac^2 - a^3\right) - \left(a^2b + bc^2 - b^3\right) < 0, \qquad / : 2abc$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < 0,$$

$$\cos\alpha - \cos\beta < 0,$$

a kako je funkcija kosinus monotono padajuća na intervalu $(0, \pi)$, slijedi $\alpha > \beta$. □

Navest ćemo još jednu inačicu dokaza. Neka je $a > b$. Oduzmemo li jednakosti (1) i (2) dobivamo

$$a^2 - b^2 = c(a \cos \beta - b \cos \alpha).$$

Iz $a > b$ dobiva se

$$a \cos \beta > b \cos \alpha \ \ tj. \ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} < \frac{a}{b}.$$

Kako je prema poučku o sinusima $a = 2R \sin \alpha$ i $b = 2R \sin \beta$, iz prethodne nejednakosti slijedi

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} < \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \ \Rightarrow\ \sin\beta\ \cos\alpha - \cos\beta\ \sin\alpha < 0 \ \Rightarrow\ \sin\left(\beta - \alpha\right) < 0 \ \Rightarrow\ \alpha > \beta,$$

jer je funkcija sinus neparna na intervalu $(-\pi, \pi)$ i pozitivna na $(0, \pi)$.

4. *Nasuprot većem kutu je veća stranica.*

Dokaz je analogan onom iz prethodne tvrdnje, a provodi se u suprotnom smjeru. Iz

$$\alpha > \beta \Rightarrow \cos\alpha < \cos\beta,$$

dobivamo

$$(a-b)\left[(a+b)^2 - c^2\right] > 0 \Rightarrow a > b.$$

5. *Nasuprot jednakim stranicama su jednaki kutovi.*

Ponovno, ako oduzmemo jednakosti (1) i (2), nakon sređivanja je

$$a^2 - b^2 = c(a\cos\beta - b\cos\alpha).$$

Za $a = b$ *je* $\cos\beta = \cos\alpha$, *tj.* $\alpha = \beta$.

6. *Nasuprot jednakim kutovima su stranice jednakih duljina.*

Iz jednakih kutova, $\alpha = \beta$ izlazi

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Nakon sređivanja ova jednakost prelazi u

$$(a-b)\left[(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 - c^2\right] = 0 \Rightarrow a = b.$$

7. *Zbroj svih kutova u trokutu jednak je 180°.*

Ako u jednakostima (4) i (5) stavimo $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$, bit će:

$$2R\sin\gamma = 2R\sin\beta\cos\alpha + 2R\sin\alpha\cos\beta,$$

$$2R\sin\alpha = 2R\sin\gamma\cos\beta + 2R\sin\beta\cos\gamma.$$

Nakon dijeljenja s $2R$ i koristeći adicijski teorem za sinus, dobivamo

$$\sin\gamma = \sin(\beta + \alpha), \text{ i } \sin\alpha = \sin(\gamma + \beta).$$

Iz prve od ovih jednakosti slijedi

$$\gamma = \beta + \alpha \text{ ili } \gamma = 180^\circ - (\beta + \alpha).$$

Pretpostavimo da je $\gamma = \beta + \alpha$. Ako bismo iz druge jednakosti imali $\alpha = \gamma + \beta$, iz sustava jednadžbi

$$\gamma = \beta + \alpha \quad , \quad \alpha = \gamma + \beta$$

dobiva se $\beta = 0$, a to je u suprotnosti s pretpostavkom da je $\beta > 0$. Zato je $\gamma = 180^\circ - (\beta + \alpha)$., tj. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Literatura

[1] B. PAVKOVIĆ I D. VELJAN, *Elementarna matematika 2,* Školska knjiga, Zagreb, 1995.