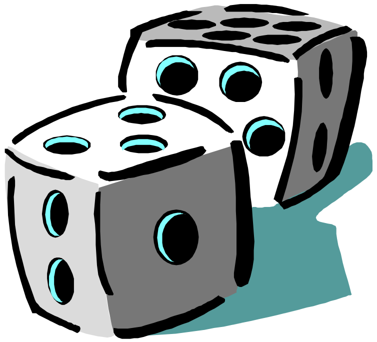
KOMBINATORIKA



Uvod

Snježana Varga , prof.

U svakodnevnom životu vrlo često čujemo riječi : “**kombinirati**” ili “**kombinacija**”. Ti pojmovi su svakome više ili manje poznati bar u njihovoj svakodnevnoj upotrebi , npr.

- na nogometnoj utakmici govori se o kombinaciji napada i obrane;
- slikar govori o ugodnim kombinacijama boja;
- kemičar govori o kombinacijama elemenata ili spojeva ...

Tako postoji i dio matematike koji se zove KOMBINATORIKA i koja u svojoj biti zadire u samo područje matematike, ali i u područje njene primjene .

Pokušajmo odgovoriti na pitanje čime se bavi kombinatorika .

???

Iz aritmetike znamo da je osnovna i prvobitna operacija koju je čovjek susreo već na najprimitivnijem stupnju svoje kulture, operacija brojanja. Nije nam problem izbrojiti predmete u nekom skupu, npr. ovce u stadu, jabuke u košari, pa čak niti ako tih predmeta ima puno; trebat će samo više vremena.

Međutim, već i manji skupovi mogu nam zadati probleme , ako su elementi u tim skupovima raspoređeni u neke grupe na razne načine , pa treba naći koliko je takvih grupa . Tu već brojanje može postati prava vještina . Evo jednog primjera :

PRIMJER 1.

U društvu se nalazi 5 prijatelja. Oni su dobro raspoloženi i dolazi do kucanja čašama .Koliko će biti kucaja čašama pri tom činu , ako se svaki kod nazdravljanja kucne sa svakim ?

Da su bila samo **2 prijatelja** , bio bi 1 kucaj .

Ako su **3 prijatelja** , prvi će se kucnuti s drugim i trećim te još drugi sa trećim , dakle ukupno 2+1=3 kucaja.

Ako ih je **četvorica**, sličnim razmatranjem dobijemo 3+2+1=6 kucaja.

Konačno , ako ih je **petorica** imamo 4+3+2+1=10 kucaja .

Vidimo kako se povećavanjem broja prijatelja naglo povećava i broj kucaja te brojanje postaje sve složenije i složenije pa bi se lako moglo pri većem broju elemenata dogoditi da se pri brojanju preskoči koji element i da se ne uzmu u obzir svi mogući slučajevi.

Ali tu pomaže nešto drugo. U takvim se primjerima mogu uočiti izvjesne **pravilnosti i zakonitosti** .

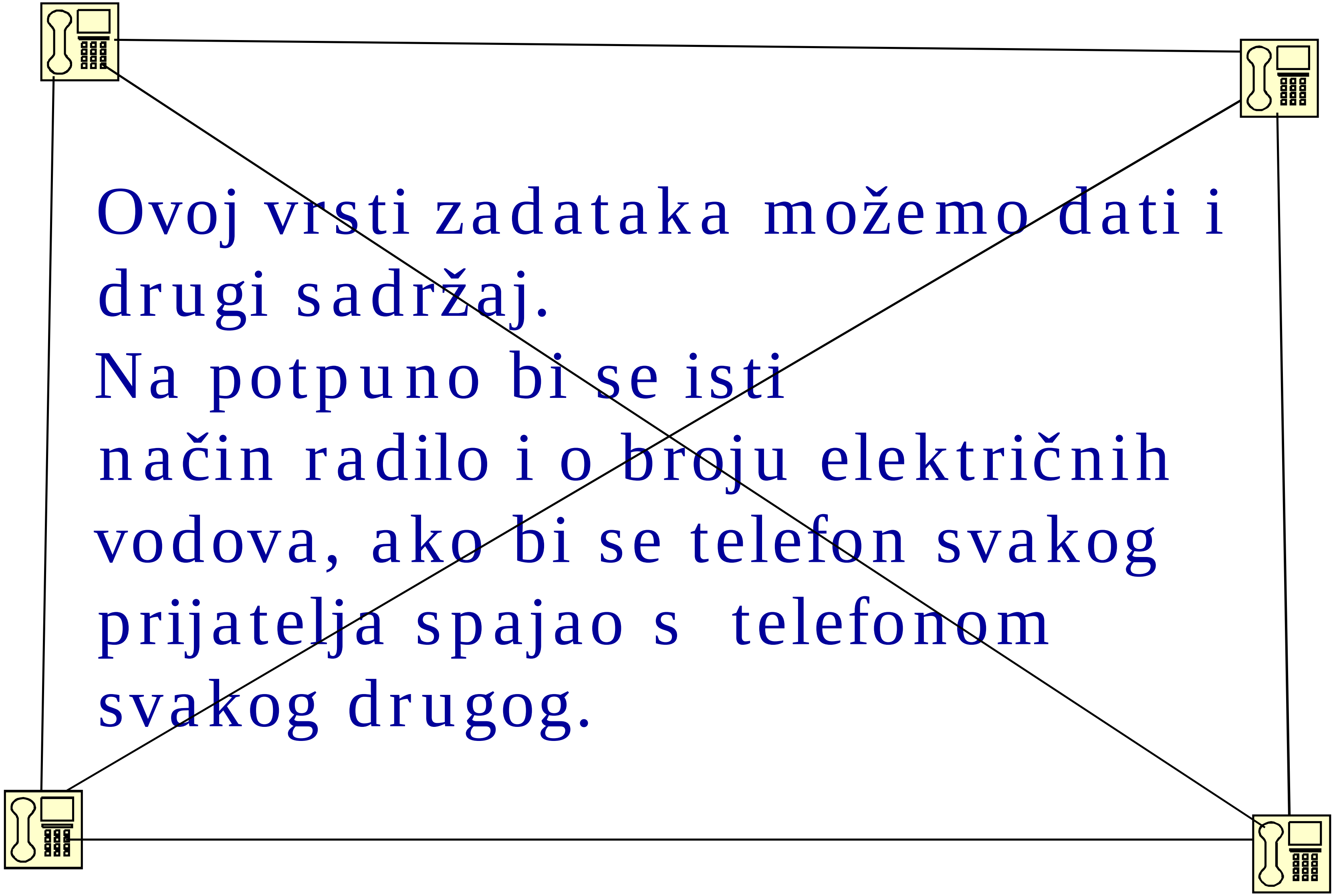
Tako npr.

kad bi bilo 6 prijatelja , broj bi kucaja bio 1+2+3+4+5=15 . Da ih je bilo 8, bilo bi 1+2+3+4+5+6+7=28 kucaja.

Naslućujemo , dakle, da će se moći iz tih pravilnosti naći opće formule , prema kojima će se moći izračunati, koliko je elemenata ili njihovih grupa , uz određene uvjete .

Uzmimo još jedan primjer . Naše se društvo rukovalo na rastanku . Koliko je bilo stisaka ruku?

Jasno je da nas analogija s brojem kucaja upućuje na to da ih je bilo isto toliko koliko i kucaja s čašama.



Ovoj vrsti zadataka možemo dati i drugi sadržaj.
Na potpuno bi se isti način radilo i o broju električnih vodova, ako bi se telefon svakog prijatelja spajao s telefonom svakog drugog.

Kao što vidimo , radit će se o istoj relaciji zaodjenutoj u drugo ruho. O takvim se relacijama upravo i radi u matematici. U relaciji, koja će obuhvatiti sve prethodne slučajeve, apstrahirat će se konkretni sadržaj, pa će ostati samo čisti odnosi, iskazani u jednoj općoj formuli.

PRIMJER 2.

Vratimo se ponovo našim prijateljima. Neka su sada četvorica. Sastali su se zbog partije karata. Pri tome su se dogovorili da će te večeri odigrati toliko partija na koliko se načina mogu razmjestiti na sjedištima. Svaki od njih zauzet će jedno mjesto, koje su nazvali počasnim, i tako dugo ostati na njemu, dok se ostali ne ispremještaju na sve moguće načine. Koliko će biti takvih rasporeda?

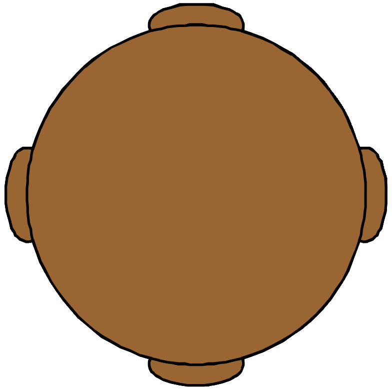
Encarta Encyclopedia, UPI/Corbis

Uzmimo da su bila trojica i označimo ih sa A, B i C. Tada bi svaki od njih mogao sjediti na počasnom mjestu, dok bi druga dvojica mijenjala svoja mjesta. dakle, imali bismo raspored:

A(BC) i **A**(CB)
B(AC) i **B**(CA)
C(AB) i **C**(BA)

Ukupno imamo $3\times2=6$ mogućnosti.

Slično bi dobili za četvoricu prijatelja ukupno $1\times2\times3\times4=24$ mogućnosti.



Tako bi se moglo nastaviti i kada bi se radilo o rasporedu više prijatelja oko okruglog stola.

PRIMJER 3.

Bilo je već prilično kasno kada su se naši prijatelji odlučili rastati. Kako se nakon svake igre obilno pilo vino, kada su ustali od stola i teturajući došli do vješalice, svatko je od njih uzeo tuđi šešir. Na koliko je različitih načina svaki od njih mogao otići kući s tuđim šeširom na glavi ?

I ovdje možemo raditi postupno. Ako su samo **dvojica**, označimo ih sa A i B, a njihove šešire sa a i b , tada može biti samo ovaj slučaj:

Ab, Ba .

Ako su **trojica** A, B, C, bila bi dva slučaja:

Ab Bc Ca

Ac Ba Cb .

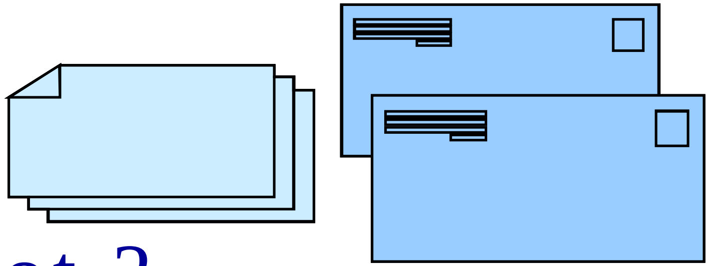
Kako bi bilo da su njih **četvorica** A, B, C i D ?

Da je **A** uzeo šešir **b** , imali bismo 3 mogućnosti :

Ab Ba Cd Dc
Ab Bc Cd Da
Ab Bd Ca Dc.

Ako bi **A** otišao sa šeširom **c**, opet bi bilo 3 mogućnosti. I napokon, da je **A** otišao sa šeširom **d**, bilo bi opet 3 mogućnosti, sveukupno dakle , $3 \times 3 = 9$ mogućnosti.

Ovaj problem, samo u drugom obliku,
kao i njegovo rješenje,
dali su prije
200 godina **L. Euler**
i N. Bernoulli.
Radilo se o "zamijenjenim pismima".
Netko piše **n** pisama i ima **n** omota
s adresama.



Na koliko načina može
staviti pismo u krivi omot ?

U svim navedenim primjerima mogli smo vidjeti da brojanje postaje sve teže, to teže što je više elemenata u igri.

Kada bismo npr. htjeli 10 knjiga ispremještati na polici na sve moguće načine, vidjeli bismo da je to golem posao, jer bi se tih 10 knjiga moglo poredati ni više ni manje nego na

3 628 800

različitih načina.

Ovakvim, posebnom vrstom zadataka bavit će se **KOMBINATORIKA**. To je dakle, grana matematike koja se bavi:

- prebrojavanjem različitih razmještaja elemenata nekog konačnog skupa;
- prebrojavanjem različitih izbora podskupova nekog konačnog skupa
- prebrojavanjem različitih razmještaja elemenata u izabranim podskupovima konačnog skupa.

Osnovni su pojmovi kombinatorike

- varijacije
- kombinacije
- permutacije.

Ta je važna disciplina danas prerasla okvire tih pojmova. Kombinatorika je povezana praktično sa svim matematičkim disciplinama, kako s teoretskima tako i s primjenjenima.

Nekoliko primjera svakodnevne upotrebe ...

Šifra koja se sastoji od tri broja od 0 do 9 **koja otvara bravu na torbi…**

…ili mnogo složenija **šifra brojeva koja otvara sef**, primjer je primjene kombinatorike u svakodnevnom životu.

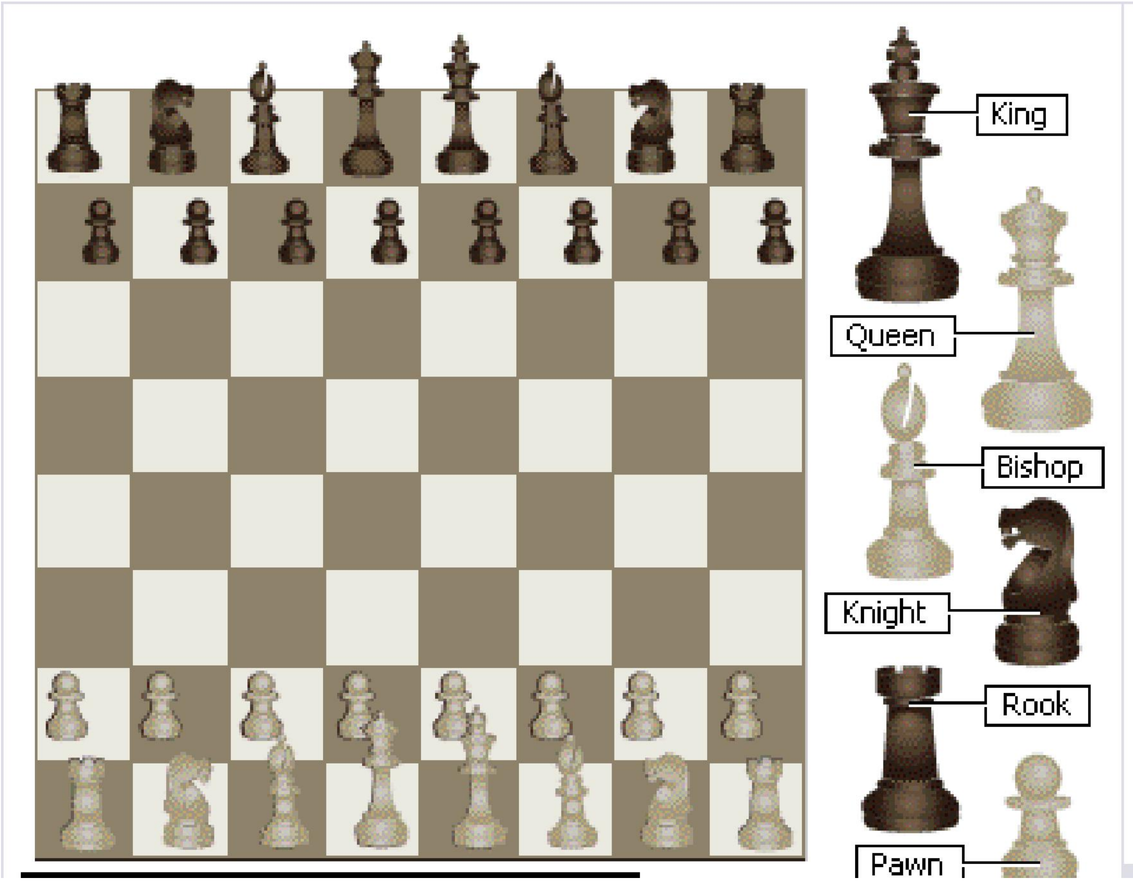
Univerzalni kod proizvoda –pojavljuje se gotovo na svim proizvodima koje kupujemo u trgovini. Dizajn EAN koda omogućava dućanu jednostavno praćenje količine proizvoda, jednostavnu provedbu inventure te olakšava promjenu cijene. Postoje dva dijela koda: **bar kod**(bar-deblja crta, engl.) i **EAN broj** koji ima 13 znamenaka.

JMBG….

0612970315603

Registracijske tablice na automobilima:

zabavne igre npr. šah



- **u politici** (npr. izbor članova vijeća)
- **u poslovanju i ekonomiji** (npr. testiranje kupaca , izbor osoblja , istraživanje tržišta , transport , …)
- **u medicinskim istraživanjima**

itd.

Utjecaj kombinatorike na matematiku i na ostale znanosti neprestano raste. Tome je pridonio i pronalazak i intenzivan razvoj brzih elektronskih računala i njihov cjelokupni utjecaj na razvoj znanstvene misli i ljudsko društvo u cjelini. **Elektronska računala** ne rade sama od sebe; njih treba programirati. No osnovu za te programe često čine kombinatorni algoritmi za rješavanje problema. Postoje još i drugi razlozi za takav razvoj kombinatorike u posljednjih 30-40 godina. Tako se npr. spoznalo da se kombinatorika može primijeniti i na discipline za koje se smatralo da nemaju baš nikakve ozbiljne veze s matematikom. Tu se ne misli na **fiziku, astronomiju, tehniku i statistiku** (discipline u kojima se matematika primjenjuje tradicionalno) nego i na **biologiju, kemiju, elektroniku, medicinu, lingvistiku, sociologiju, antropologiju, ekonomske znanosti te na neke društvene znanosti.**

Zanimanje za kombinatoriku i njezine primjene i dalje neprestano raste.

Malo povijesti...

Elemente kombinatorike poznavale su i stare matematike (indijska, kineska, arapska itd.).
U Europi je uvodi Guldin 1622.
Razvija se tijekom 17.st. naročito u radovima Leibniza i J. Bernoullija.

Naziv potječe od **Leibniza** (1666).

Zanimljivosti

Upoznajmo se s nekoliko zanimljivih primjera, koji su u vezi s kombinatorikom, a koji će pokazati, na kakve su sve ideje ljudi tijekom povijesti dolazili, baveći se kombinatorikom.

U **Indiji** je pojam kombiniranja odavno bio vrlo razvijen. Njihov matematičar **Baskara**, rođen 1114. godine postigao je u kombinatorici vrlo mnogo točnih rezultata te došao do mnogo formula (iako bez dokaza) koje su pokazivale razvijen smisao za kombinatorne probleme.

I u indijskom stihotvorstvu susreću se izvjesni kombinatorički elementi.

Još se to jasnije razabire kod prikazivanja njihova boga **Višne**. To je božanstvo imalo četiri ruke. U jednoj ruci držalo je batinu,

u drugoj ploču, u trećoj lotosov cvijet, a u četvrtoj školjku. I prema tome, kako su i kojim redom bili raspoređeni ti predmeti u rukama, postojala su i različita posebna imena (njih 24) toga božanstva.

Slijedeći primjer dolazi nam iz španjolske provincije Asturije. U gradiću **Oviedu** je knez po imenu **Silo** sagradio crkvu San Salvador. Da bi to označio kao svoje djelo, dao je, da mu se na nadgrobni spomenik ukleše

ovaj, na prvi pogled, malo čudan natpis:

t i c e f s p e c n c e p s f e c i t
i c e f s p e c n i n c e p s f e c i
c e f s p e c n i r i n c e p s f e c
e f s p e c n i r p r i n c e p s f e
f s p e c n i r p o p r i n c e p s f
s p e c n i r p o l o p r i n c e p s
p e c n i r p o l i l o p r i n c e p
e c n i r p o l i S i l o p r i n c e
p e c n i r p o l i l o p r i n c e p
s p e c n i r p o l o p r i n c e p s
f s p e c n i r p o p r i n c e p s f
e f s p e c n i r p r i n c e p s f e
c e f s p e c n i r i n c e p s f e c
i c e f s p e c n i n c e p s f e c i
t i c e f s p e c n c e p s f e c i t

Ovo treba čitati počevši od srednjeg **S** pa do ona četiri **t**, koja stoje na uglovima. Odmah vidimo, da se to može učiniti na vrlo mnogo načina, jer je **Silo** bio toliko ponosan svojim djelom, da mu nije bilo dosta da se samo jednom pročita:

Silo princeps fecit

(Silo knez je učinio),

nego je želio da se to svakako učini više puta. To je zaista i postigao u navedenoj shemi, jer se na ovaj način ta rečenica mogla pročitati **45 760** puta .

Drugi primjer bila bi riječ **ABRACADABRA,** u kojoj dolazi do izražaja srednjovjekovna mistika, jer je ta riječ, kako se vjerovalo, imala čudno svojstvo. Njome su se mogle liječiti mnoge bolesti, a naročito trodnevna groznica. Kombinatorička strana bila je u načinu pisanja i čitanja te riječi. Prema receptu liječnika Serenusa Saunonicusa trebalo je tu riječ napisati ovako:

A b r a c a d a b r a

A b r a c a d a b r

A b r a c a d a b

A b r a c a d a

A b r a c a d

A b r a c a

A b r a c

A b r a

A b r

A b

A

I onda je pročitati počinjući od svakog **A** pa do posljednjeg **a** u desnom vrhu idući u horizontalnom smjeru i ukoso desno na više. Na taj se način ta riječ mogla pročitati **1024** puta. Broj bi bio još i veći, ako bi se dopustili i drugi mogući načini čitanja. Zaista je bolesniku morala proći trodnevna groznica, dok je pročitao ovu čarobnu riječ na sve moguće načine.

Slijedeći primjer su riječi koje se mogu čitati u jednom ili u drugom smjeru, a ostaju iste. Npr.:

DUD

OKO

ROTOR

KAPAK

MADAM

Ali ima i čitavih rečenica, koje pročitane daju isto, čitane slijeva nadesno ili s desna nalijevo. Na primjer:

SIR IMA MIRIS.

PERICA REŽE RACI REP.

UDOVICA BACI VODU.

ANA VOLI MILOVANA.

Prije nego što se udubimo u proučavanje kombinatorike, navest ćemo riječi, što ih je **Jakob Bernoulli** rekao u svojem djelu, koje čini početke računa vjerojatnosti (“*Ars conjectandi*”, *Basel, 1713.*):

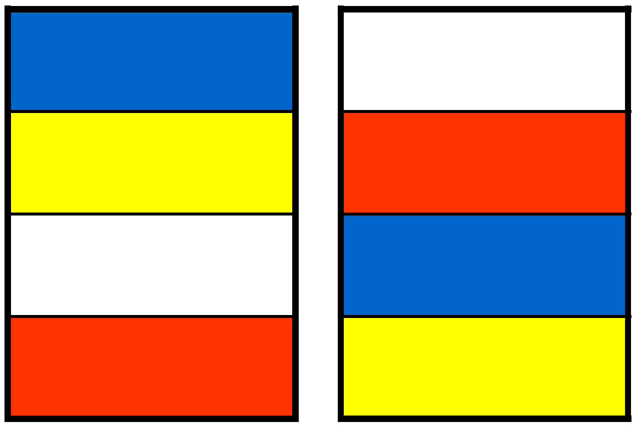
"Beskonačna raznolikost, koja se pokazuje, kako u tvorevinama prirode, tako i u ljudskim djelima, i koja čini osobitu ljepotu svemira, očito i nema ni u čemu drugome svoj uzrok, osim u raznovrsnosti spojeva , mješavini ili grupiranju pojedinih dijelova. Kako je broj onoga, što utječe na stvaranje neke pojave ili nekog događaja, često tako velik i tako raznovrstan, da upoznavanje svih načina, po kojima se može, odnosno ne može izvesti to spajanje, miješanje ili grupiranje, nailazi na najveće teškoće, nije čudo, što i najmudriji i najobrazovaniji ljudi ne padaju tako često ni u jednu pogrešku, kao u pogrešku, koja se u logici zove *nedovoljnim nabrajanjem dijelova.* Stoga se ne ustručavam ustvrditi, da je ta pogreška gotovo jedini izvor vrlo mnogih, najznatnijih zabluda, u koje svakodnevno upadamo pri promatranju pojava, ako ih nastojimo upoznati i njima se koristiti. Zato ovu, kombinatorikom nazvanu vještinu, treba s punim pravom smatrati naročito korisnom, jer nas može potpomoći u tom nedostatku naših ćutilnih opažanja. Ona nas uči, kako se primjenjuju svi načini i postupci, po kojima se više predmeta može pomiješati, grupirati ili međusobno spajati, kako se mogu lako prebrojiti sa sigurnošću, da nijednog od njih nismo ispustili.

Mada ova metoda samo utoliko pripada spekulaciji, ukoliko se kod nje može primijeniti račun, ona je ipak zbog svoje koristi i nužnosti univerzalna i od takve vrijednosti, da bez nje ni mudrosti filozofa, ni točnost povjesničara, ni dijagnoza liječnika, niti rezoniranje političara ne može postojati. Za potvrdu ovome neka se spomene samo to, da se djelovanje svih njih oslanja na mišljenje, a svako se mišljenje osniva na kombinacijama uzroka, koji djeluju."

I na kraju zadaća …

1.Zadatak

Neka su dana četiri jednaka elementa (kvadra) Lego kocki različitih boja (crveni, žuti, plavi i bijeli). Koliko je različitih tornjeva moguće složiti upotrebljavajući svaki element točno jedanput ?



2.Zadatak

Koliko različitih zastava obojenih sa tri boje je moguće napraviti ako za bojanje imamo izbor između crvene, žute, bijele, plave i crne boje (svaka se boja na zastavi pojavljuje samo jednom)?

Prezentaciju izradila **Snježana Varga**, profesorica matematike u Srednjoj školi u Daruvaru i pri tome koristila sljedeću literaturu:

- Kombinatorika, priručnik za učenike srednjih škola
  Milenko Sevdić, Školska knjiga, Zagreb
- Matematika 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole
  Golubović, Javor, Školska knjiga, Zagreb
- Matematika 4, priručnik za nastavnike za 4.r.četverogodišnjih strukovnih škola
  Golubović, Javor, Školska knjiga, Zagreb
- Matematika 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4.r. ekonomskih škola
  Đurović , Đurović , Rukavina , Pasanović
  Neodidacta, Zagreb
- Kombinatorika s teorijom grafova,
  D.Veljan, Školska knjiga, Zagreb

Poštovani !
Ukoliko vam se svidio moj rad "Uvod u kombinatoriku" te želite koristiti neke njegove dijelove imate moju dozvolu uz nekoliko uvjeta :

- **korištenje isključivo u nekomercijalne svrhe**
- **navedeno ime autora tj. moje**
- **da mi se obratite kratkim e-mailom u kojem ćete mi s par riječi opisati gdje želite koristiti moj materijal.**

Moja adresa na koju mi se možete obratiti , pohvaliti ili pokuditi je

snjezana.varga@bj.t-com.hr

Snježana Varga , Daruvar