NA KOLIKO NAČINA?

Mladen Halapa, *Bjelovar*

Za ovu zimu imam dva stara kaputa i troje hlače, tužno će Jana. Nije važno! Ipak možeš mijenjati garderobu svaki dan, odgovori Katica. Piskutavi zvuk školskog zvona najavio je početak sata i djevojke prekinuše razgovor.

A kako bismo mi pomogli Jani da osvježi svakodnevnu garderobu?

Koliko dana za redom može dolaziti u školu drukčije odjevena?

Označimo kapute s K_1 i K_2, a hlače s H_1, H_2 i H_3. Uz prvi kaput (K_1) može obući bilo koje hlače. Zapišimo to ovako:

$$K_1 - H_1\ ,\ K_1 - H_2\ ,\ K_1 - H_3\ .$$

S drugim kaputom (K_2) *opet kombinira sve troje hlače:*

$$K_2 - H_1\ ,\ K_2 - H_2\ ,\ K_2 - H_3\ .$$

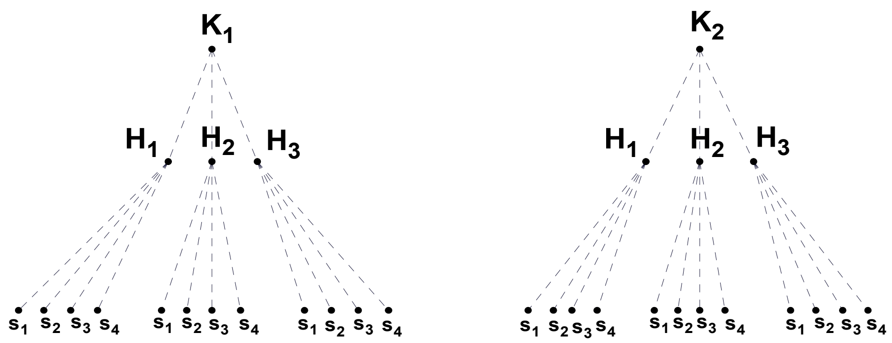
U prosudbi možemo sebi pomoći i ovakvom shemom:

Crtice pokazuju Janine načine odijevanja. Ako s n_1 označimo broj kaputa, a s n_2 broj hlača, tada umnožak broja kaputa i broja hlača daje broj različitih načina odijevanja:

$$n_1 = 2\ ,\ n_2 = 3\ ,\ n_1 \cdot n_2 = 6.$$

Šest dana zaredom Jana može mijenjati garderobu.

Dodajmo još četiri šala i izračunajmo na koliko načina sad može biti odjevena. Poslužimo se slikom:



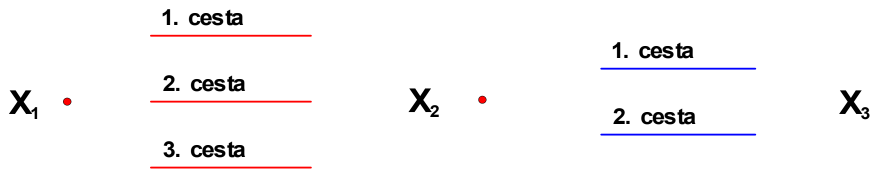
Umnožak broja kaputa (K), broja hlača (H) i broja šalova (s) daje sve načine odijevanja:

$$n_1 = 2\ ,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4\ ,\ n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 24$$

Evo još nekoliko primjera.

Primjer 1. Iz mjesta X_1 vode tri ceste u mjesto X_2, a iz mjesta X_2 vode dvije ceste u mjesto X_3. Na koliko načina može vozač doći iz mjesta X_1 u mjesto X_3 ako mora proći kroz X_2?

Rješenje. Zadatak predočimo shemom:



Sa svakom cestom od mjesta X_1 do mjesta X_2 vozač može kombinirati dvije ceste od mjesta X_2 do mjesta X_3. Ukupno je to šest mogućih načina putovanja. Ili formalno:

$$n_1 = 3,\ n_2 = 2,\ n_1 \cdot n_2 = 6.$$

Primjer 2. Test ima tri pitanja s odgovorima DA i NE. Na koliko se različitih načina može odgovoriti na pitanja iz testa?

Rješenje. Za prvi način bit će na sva tri pitanja odgovor DA. Za drugi način bit će na prva dva pitanja odgovor DA, a na treće NE, itd. Prikažimo to tablično:

Broj načina	Redni broj pitanja		
	I.	**II.**	**III.**
1.	DA	DA	DA
2.	DA	DA	NE
3.	DA	NE	DA
4.	DA	NE	NE
5.	NE	DA	DA
6.	NE	DA	NE
7.	NE	NE	DA
8.	NE	NE	NE

Ako je n_1 broj odgovora na prvo pitanje, n_2 na drugo pitanje i n_3 na treće pitanje, tada je broj rješenja:

$$n_1 = 2,\ n_2 = 2,\ n_3 = 2,\ n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3.$$

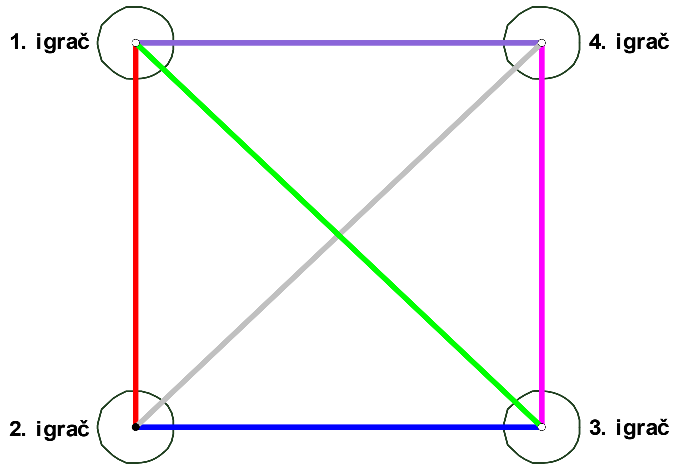
Primjer 3. Na šahovskom turniru bila su četiri natjecatelja. Svaki od njih odigrao je sa svakim po jednu partiju. Koliko je ukupno odigrano partija?

Rješenje. Četiri su natjecatelja. Svaki igra s preostalima po jednu partiju. Dakle, svaki igra tri partije. Neka je $n_1 = 4$, a n_2 broj partija svakog od njih, $n_2 = 3$. Ukupno je $n_1 \cdot n_2 = 12$.

Je li to stvaran broj partija?. Nije, jer smo svaku šahovsku partiju računali dvaput. Jednom kao partiju prvog igrača, a drugi put drugog igrača. Prema tome je broj partija dvaput manji:

$$\frac{n_1 \cdot n_2}{2} = 6.$$

Predočimo to skicom:



Svaka obojena crta označava jednu partiju.
Pokušajte sad preokrenuti pitanje iz primjera 3.

Na šahovskom turniru odigrano je šest partija. Koliko je bilo igrača ako je svaki odigrao s preostalima po jednu partiju?
Zaključite sami!

Ovih nekoliko primjera ilustracija su najvažnijeg teorema iz kombinatorike (dijela matematike koja se uči u srednjoj školi), a zove se *teorem o uzastopnom prebrojavanju*. Možemo ga u slobodnoj interpretaciji ovako izreći:

Ako sa prva stvar može učiniti na n_1 načina, druga na n_2 načina, treća na n_3 načina, onda sa na $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ načina mogu učiniti sve te stvari. Ili: Ako prvi skup ima n_1 elemenata, drugi skup n_2 elemenata, treći skup n_3 elemenata, onda se na $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ *načina može izabrati po jedan element iz svakog skupa.* Teorem vrijedi za bilo koji broj skupova.

Zadatci za vježbu

1. Knjižnica ima 13 knjiga iz biologije, 11 knjiga iz povijesti i 7 knjiga iz zemljopisa. Na koliko načina učenik može uzeti po jednu knjigu iz svakog područja?

2. Riješite prvi zadatak uz uvjet da je knjižničar iz svakog područja uzeo po dvije knjige!

3. Na šahovskom turniru bilo je 15 natjecatelja. Svaki šahist je odigrao sa svakim preostalim po jednu partiju. Koliko je ukupno odigrano partija?

4. Na šahovskom turniru odigrana je 21 partija. Nađite broj natjecatelja ako je svaki sa svakim preostalim odigrao po jednu partiju.

5. Delegacija VII. razreda ima 5 članova, a VIII. razreda 4 člana. Na koliko se načina može izabrati predsjednik i blagajnik pod uvjetom da predsjednik bude iz VIII. razreda, a blagajnik iz VII. razreda?

6. Na nekom sastanku bilo je 45 rukovanja kad se svatko rukovao jedanput sa svakim. Koliko je bilo ljudi na sastanku?

7. 24 učenika VII. razreda i 20 učenika VIII. razreda natječu se u šahu. Koliko je partija šaha odigrano ako svaki učenik iz VIII. razreda odigra jednu partiju sa svakim učenikom iz VII. razreda?

8. Test ima 10 pitanja s odgovorima DA i NE. Na koliko se različitih načina može odgovoriti na postavljena pitanja? (Na koliko se načina može ispuniti test s odgovorima DA, NE i NE ZNAM?)