Primjena Koši-Bunjakovski-Švarcove nejednakosti u algebarskim nejednakostima za određivanje minimuma i maksimuma u geometriji

Problemi maksimuma i minimuma ne javljaju se samo u nauci i tehnologiji i njihovim primjenama nego i u svakodnevnom životu. Raznolikost ovih problema je najčešće geometrijske prirode. Naći najkraći put između dva objekta koji zadovoljavaju neki uslov ili naći figuru minimalnog obima, površine ili zapremine su tipični problemi koje često susrećemo.Nije neobično da čujemo da su neki ljudi bili zaokupljeni nekim ovakvim problemom duži vremenski period.
Naprimjer, Heronovo otkriće je da zraka svjetlosti u prostoru koja dolazi iz tačke A i odlazi u tačku B poslije refleksije od ogledala α pređe najkraći mogući put od A do B imajući zajednički položaj s α.

Slijedeći problem je tzv. problem figura jednakog obima, koji je razmatrao Dekart (Decartes, 1596.-1650.): npr. od svih ravnih figura sa zadanim obimom, naći onu sa najvećom površinom. Ta ¨perfektna figura¨ koja je rješenje problema je bila kružnica, što je znao Dekart (moguće i mnogo ranije). Međutim, tačan dokaz ovog problema je prvi dao Jakob Štajner u 19. vijeku.

Malo drugačiji problem figura zadanog obima pripisuje se Dido, legendarnoj kraljici Kartage. Njoj je lokalno stanovništvo dopustilo da kupi zemljište na obali Afrike "ne veće od onoga što volovska koža može da okruži." Rezanjem volovske kože na uske trake, ona je napravila dugi niz s kojim je trebala okružiti što veću površinu na morskoj obali. Kako ovo uraditi na što optimalniji način ? Jedno od rješenja je lagano naći ako znamo maksimalan obim kruga.

Veliki broj geometrijskih problema maksimuma i minimuma mogu se riješiti koristeći se odgovarajućim algebarskim nejednakostima. Mnoge algebarske nejednakosti mogu se predstaviti kao geometrijski problemi. Tipičan primjer je dobro poznata nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (x, y \geq 0),$$

koji je ekvivalentan sa slijedećom tvrdnjom:

Od svih pravougaonika sa datim obimom kvadrat ima maksimalnu površinu.

Ovdje ćemo geometrijske probleme maksimuma i minimuma rješavati koristeći se CBS nejednakošću koju ću dati u vidu teoreme.

Teorema : Za bilo koja dva konačna niza realnih brojeva $a = (a_1, ..., a_n)$ i $b = (b_1, ..., b_n)$ vrijedi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2}\right), \qquad (1)$$

odnosno,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^{\ 2} + ... + a_n^{\ 2}\right) \cdot \left(b_1^{\ 2} + ... + b_n^{\ 2}\right).$$

Pri tome jednakost vrijedi u (1) ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni, tj.

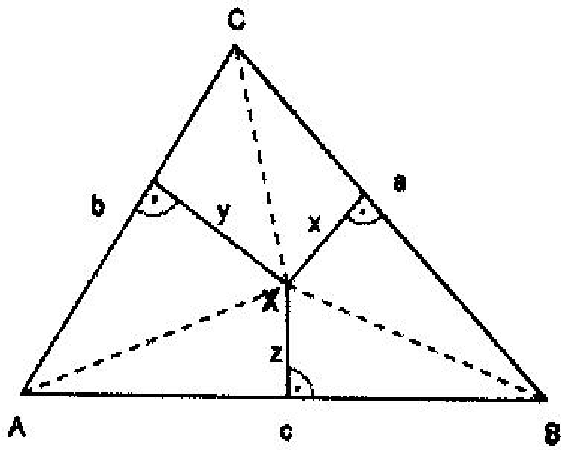
$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}.$

Zadatak 1. Za bilo koju tačku X unutar trougla ΔABC su x, y i z rastojanja tačke X od pravih BC,AC i AB redom. Naći položaj tačke X za koji je suma $x^2 + y^2 + z^2$ minimalna.

Rješenje:

Označimo sa $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c.$ Tada je površina trougla ΔABC jednaka zbiru površina trouglova ΔAXB, ΔAXC, ΔBXC, tj: $P_1 = \frac{ax}{2}, P_2 = \frac{by}{2}, P_3 = \frac{cz}{2}$

odnosno,



$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} / \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2P = ax + by + cz$$

$$4P^2 = (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{(nejednakost CBS)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(ax + by + cz)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Prema tome, suma $x^2 + y^2 + z^2$ treba biti minimalna za svaku tačku X za koju vrijedi

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ kada vrijedi jednakost. Dakle, $\min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Zadatak 2. Za bilo koju tačku X unutar trougla ABC gdje su x, y i z rastojanja tačke X od pravih a=BC, b=AC i c=AB redom. Naći položaj tačke X za koju je minimalno :

a) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$;

b) $\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz}$.

Rješenje:

a) U zadatku 1. dobili smo da je $2P_{\Delta ABC} = ax + by + cz$. Stavimo da je $x_1 = \sqrt{ax}$, $x_2 = \sqrt{by}$, $x_3 = \sqrt{cz}$, $y_1 = \sqrt{\frac{a}{x}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{b}{y}}$, $y_3 = \sqrt{\frac{c}{z}}$. Tada prema nejednakosti CBS

dobijamo:

$$\left(\left(\sqrt{ax}\right)^2+\left(\sqrt{by}\right)^2+\left(\sqrt{cz}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2\right)\geq$$

$$\left(\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{by}\cdot\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{cz}\cdot\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2=\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}\right)^2=(a+b+c)^2$$

$$(ax+by+cz)\cdot\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\geq(a+b+c)^2\Rightarrow$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}=\frac{(a+b+c)^2}{2P_{\Delta ABC}},$$

gdje jednakost vrijedi ako je $x=y=z.$ Tada se tačka X nalazi u centru upisanog kruga trougla ΔABC, odnosno u tački presjeka simetrala uglova. Dakle,

$$\min\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\frac{(a+b+c)^2}{2P_{\Delta ABC}}.$$

b) Označimo sa $x_1=\sqrt{ax}, x_2=\sqrt{by}, x_3=\sqrt{cz}, y_1=\sqrt{\frac{1}{ax}}, y_2=\sqrt{\frac{1}{by}}$ i $y_3=\sqrt{\frac{1}{cz}}$, pa iz CBS nejednakosti slijedi:

$$(ax+by+cz)\cdot\left(\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}\right)\geq(1+1+1)^2=3^2=9\Rightarrow$$

$$\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}\geq\frac{9}{ax+by+cz}=\frac{9}{2P_{\Delta ABC}},$$

gdje jednakost vrijedi ako je $ax=by=cz.$ Dakle, imamo da je :

$$\min\left(\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}\right)=\frac{9}{2P_{\Delta ABC}},$$

kada je tačka X težište trougla $\Delta ABC.$

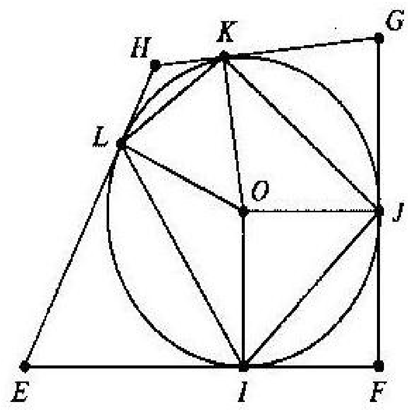
Zadatak 3. Neka su površina i obim tangentnog četverougla C , A_C i P_C, respektivno. Ako su površina i obim tetivnog četverougla čiji vrhovi pripadaju kružnici koja je upisana u četverougao C, A_T i P_T, respektivno dokazati

$$\frac{A_C}{A_T} \geq \left(\frac{P_C}{P_T}\right)^2.$$

Rješenje:

Neka je dat četverougao EFGH sa uglovima

$\angle E = 2\alpha_1, \angle F = 2\alpha_2 = \angle G = 2\alpha_3, \angle H = 2\alpha_4$. Neka je u taj četverougao upisana kružnica poluprečnika r sa centrom u tački O. Neka su takođe stranice EF,FG,GH,HE tangente kružnice u tačkama I,J,K,L kao na slici.



Za trougao ΔEIO imamo IO= r i $\angle OEI = \alpha_1$, tada je $EI = rctg\alpha_1$. Pronađimo dalje IF,FJ,…,LE, dobićemo $P_T = 2r\sum_{i=1}^{4} ctg\alpha_i$.

Takođe, $P_{\Delta EFO} = \frac{1}{2} EF \cdot IO = \frac{1}{2} EF \cdot r$. Izračunavajući na sličan način i površine $P_{\Delta FGO}$, $P_{\Delta GHO}$, $P_{\Delta HEO}$ dobijamo $A_T = \frac{1}{2} P_T \cdot r$. Takođe pišemo

$$IJ = 2r \sin \angle IOF = 2r \sin\left(90^\circ - \alpha_2\right) = 2r \cos \alpha_2.$$

Jednostavnim računanjem JK, KL, LI dolazimo do $P_C = 2r\sum_{i=1}^{4} \cos \alpha_i$. Također vrijedi

$\angle IOJ = 180^\circ - \angle JFI = 180^\circ - 2\alpha_2$ i tada je površina

$$P_{\Delta IOJ} = \frac{1}{2} OI \cdot OJ \sin \angle IOJ = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha_2 = r^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2.$$

Analogno, za $P_{\Delta JOK}, P_{\Delta KOL}, P_{\Delta LOI}$ dobijamo

$$A_C = r^2 \sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i .$$

Uvrštavajući sve što smo prethodno izračunali u traženu nejednakost , dobijamo :

$$\frac{r^2 \sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i}{\frac{1}{2} P_T \cdot r} \geq \frac{\left(2r \sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i\right)^2}{P_T^{\ 2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2r^2 \sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i}{P_T \cdot r} \geq \frac{4r^2 \left(\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i\right)^2}{P_T^{\ 2}} \Leftrightarrow$$

$$P_T \left(\sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i\right) \geq 2r \left(\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$2r \left(\sum_{i=1}^{4} ctg\alpha_i\right) \left(\sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i\right) \geq 2r \left(\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i\right)^2$$

ili što je isto

$$\left(\sum_{i=1}^{4} ctg\alpha_i\right) \left(\sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i\right)^2 .$$

Stavljajući u nejednakost CBS $a_i = \sqrt{ctg\alpha_i}, b_i = \sqrt{\sin\alpha_i \cos\alpha_i}, i = 1,...,4$ dobijamo :

$$(ctg\alpha_1 + ctg\alpha_2 + ctg\alpha_3 + ctg\alpha_4)(\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_3 \cos\alpha_3 + \sin\alpha_4 \cos\alpha_4)$$
$$\geq (ctg\alpha_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + ctg\alpha_2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 + ctg\alpha_3 \sin\alpha_3 \cos\alpha_3 + ctg\alpha_4 \sin\alpha_4 \cos\alpha_4)^2$$

odnosno,

$$(ctg\alpha_1 + ctg\alpha_2 + ctg\alpha_3 + ctg\alpha_4)(\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_3 \cos\alpha_3 + \sin\alpha_4 \cos\alpha_4)$$
$$\geq (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4)^2, q.e.d.$$

Jednakost vrijedi za $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Zadatak 4. Neka su x, y, z realni brojevi. Pokaži da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) $x, y, z > 0$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 1$

(ii) $a^2x+b^2y+c^2z > d^2$ za svaki četverougao sa stranicama a,b,c,d.

Rješenje:

Pokažimo da iz (i)$\Rightarrow$(ii).

Pretpostavimo da vrijedi (i). Tada na osnovu nejednakosti CBS za

$a_1 = a\sqrt{x}, a_2 = b\sqrt{y}, a_3 = c\sqrt{z}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}, b_3 = \frac{1}{\sqrt{z}}$

vrijedi :

$a^2x+b^2y+c^2z \geq \left(a^2x+b^2y+c^2z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq (a+b+c)^2 > d^2$,vrijedi (ii).

Pretpostavimo sada da vrijedi (ii) i dokažimo da vrijedi (i).

Prvo pretpostavimo da je $x \leq 0$, tada imamo četverougao sa stranicama dužina $a = n, b = 1, c = 1, d = n$ i dobijamo $y + z > n^2(1-x)$. A ovo je kontradikcija sa dužinom n. Tako da je sigurno x > 0, i y > 0, z > 0 . Sada postoji četverougao sa dužinama stranica $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{n}$, gdje je n dovoljno veliki broj.Tada imamo:

$$a^2x+b^2y+c^2z = \frac{x}{x^2}+\frac{y}{y^2}+\frac{z}{z^2} > \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{n}\right)^2.$$

Ako pustimo da $n \to \infty$ dobićemo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2.$$

Odavde dobijamo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 1 \text{,q.e.d.}$$

Literatura:

[1.] Andreescu, T., Mushkarov, O.,Stoyanov, L., Geometric Problems on Maxima and Minima, Birkhäuser Basel-Boston-Berlin, 2006.

[2.] Arslanagić, Š., Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3.] Bottema, O., Đorđević, R.Ž., Janić, R.R., Mitrinović, D.S.,Vasić, P.M., Geometric inequalities, Wolters-Noordhoff off publishing Groningen, The Netherlands, 1969.

[4.] Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities, Berlin/Heidelberg/New York,1970

Članak pripremila: mr. Belma Alihodžić profesor matematike u Prvoj bošnjačkoj gimnaziji u Sarajevu i magistar matematičkih nauka, smjer: Metodika nastave matematike.