

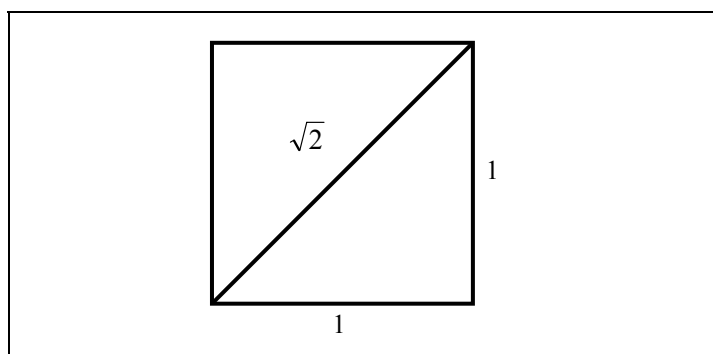
# NEKI DOKAZI IRACIONALNOSTI $\sqrt{2}$

MLADEN HALAPA, *Bjelovar*

*Iracionalan broj* definira se kao realan broj koji ne možemo napisati u obliku razlomka ili kome decimalan zapis nije periodski. Zanimljivo je kako navedeni pojam opisuju rječnici stranih riječi.

U "Rječniku stranih riječi" Bratoljuba Klaića<sup>1</sup> piše: "Iracionalni brojevi – brojevi koji se ne mogu izmjeriti s pomoću jedinice ili bilo kojeg njezina dijela i zbog toga ne mogu biti točno izraženi ni cijelim ni razlomačkim racionalnim brojevima, npr. drugi korijen iz broja 2." Kraći, koncizniji opis nalazimo u "Rječniku stranih riječi" Vladimira Anića i Ive Goldsteina<sup>2</sup>: "Iracionalni brojevi – brojevi koji se ne daju prikazati omjerom dvaju cijelih brojeva."

Prvobitno se taj pojam odnosio samo na dužine jer su starogrčki matematičari, pitagorejci (Pitagora i njegova škola) otkrili da je dijagonala kvadrata nesumjerljiva s njegovom stranicom.



To znači da nema dužine za koju bi stranica i dijagonala kvadrata bile cjelobrojni višekratnici. Tek od 16. stoljeća pojam iracionalnosti počeo se odnositi i na brojeve. Problem nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata, drugim riječima, znači da broj  $\sqrt{2}$  nije racionalan. U ovom članku dokazat ćemo na nekoliko načina

**TEOREM.** *Broj  $\sqrt{2}$  je iracionalan broj.*

► Indirektna metoda temelj je svih narednih dokaza. Ona sugerira sljedeće: pretpostavimo da je  $\sqrt{2}$  racionalan broj i odatle izvedemo neko proturječje (kontradikciju). Znači da  $\sqrt{2}$  nije racionalan, već iracionalan broj. Ta metoda zaključivanja potječe od starih Grka, prije više od dva tisućljeća i jedno je od velikih dostignuća antičkog svijeta.

Početni korak isti je u svakom od pet nabrojanih dokaza. Neka je  $\sqrt{2}$  racionalan broj,  $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ , napisan u obliku

<sup>1</sup> BRATOLJUB KLAJIĆ, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod Matice hrvatske, Zagreb, 1990.

<sup>2</sup> VLADIMIR ANIĆ – IVO GOLDSTEIN, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2000.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad (*)$$

gdje su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi, međusobno relativno prosti:

$$M(m, n) = 1. \quad (**)$$

### 1. inačica

Iz (\*) kvadriranjem dobije se

$$m^2 = 2 \cdot n^2.$$

Budući da je kvadrat parnog broja paran broj,  $m$  mora biti oblika:

$$m = 2 \cdot a, \quad a \in \mathbf{N}.$$

Sada je

$$4 \cdot a^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow n^2 = 2 \cdot a^2.$$

Posljednja jednakost uvjetuje parnost broja  $n$ , a to se protivi pretpostavci (\*\*). Dakle, broj  $\sqrt{2}$  nije racionalan, već iracionalan broj.  $\square$

### 2. inačica

Ponovno kvadrirajmo (\*) kao u prijašnjem dokazu:

$$m^2 = 2 \cdot n^2. \quad (1)$$

Ako broj  $m$  ne sadrži faktor 2, ne vrijedi (1). Znači  $\sqrt{2}$  je iracionalan broj. Ima li  $m$  u sebi faktor 2, onda ga  $m^2$  mora imati paran broj puta, npr.

$$m = 2^r \cdot a \Rightarrow m^2 = 2^{2r} \cdot a^2; \quad r, a \in \mathbf{N}.$$

Slično promišljanje vrijedi i za  $n$ :

$$n = 2^s \cdot b \Rightarrow n^2 = 2^{2s} \cdot b^2; \quad s, b \in \mathbf{N}.$$

Broj  $m^2$  sadrži paran broj faktora 2, a izraz  $2 \cdot n^2$  ima neparan broj faktora 2. Znači:

$$m^2 \neq 2 \cdot n^2.$$

To je u proturječju s (1). Dakle,  $\sqrt{2}$  je iracionalan.  $\square$

### 3. inačica

Iznovice iz (\*) slijedi

$$2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Ova jednakost nije istinita, jer zbog (\*\*) vrijedi  $M(m^2, n^2) = 1$ , pa  $\frac{m^2}{n^2}$  nije cijeli broj. To je proturječje.

Znači da je  $\sqrt{2}$  iracionalan broj.  $\square$

### 4. inačica

Jednakost (\*) daje

$$m^2 = 2 \cdot n^2.$$

Brojeve  $m$ ,  $2$  i  $n$  napišimo u brojevnom sustavu s bazom 3:

$$m = (m_1 m_2 m_3 m_4 \dots m_r)_3,$$

$$2 = 2_3,$$

$$n = (n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_s)_3,$$

gdje su  $m_i$  i  $n_i$  znamenke 0, 1 ili 2. Podsjetimo se tablice množenja u sustavu s bazom 3:

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Pretpostavimo da je  $m_k$  zadnja znamenka u broju  $m$  koja je različita od 0:

$$m_{k+1} = m_{k+2} = \dots = m_r = 0.$$

Ona je jednaka 1 ili 2. Tada je posljednja znamenka broja  $m^2$ , koja nije 0, jednaka 1 jer je

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 2 \cdot 2 = 11_3.$$

Analogno zaključivanje vrijedi i za broj  $n$ . Zadnja znamenka, različita od 0, u izrazu  $2 \cdot n^2$  je 2 pa je

$$m^2 \neq 2 \cdot n^2.$$

Broj  $\sqrt{2}$  nije racionalan, nego iracionalan.  $\square$

#### 5. inačica

Ako vrijedi (\*), tada postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva, višekratnici nazivnika  $n$ , koji pomnoženi s  $\sqrt{2}$  daju prirodan broj. Najmanji je nazivnik  $n$ :

$$n \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{N}.$$

Konstruiramo broj

$$n \cdot \sqrt{2} - n.$$

Lako se provjeri da je to prirodan broj manji od  $n$ . Kada se pomnoži s  $\sqrt{2}$  daje opet prirodan broj:

$$(n \cdot \sqrt{2} - n) \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot n - n \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{N}$$

jer je

$$2 \cdot n > n \cdot \sqrt{2}.$$

Ponovno smo dobili kontradikciju! Tvrdili smo da je nazivnik  $n$  najmanji prirodan broj za koji je

$$n \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{N}.$$

Došli smo do spoznaje da postoji i manji broj od  $n$  koji pomnožen s  $\sqrt{2}$  daje prirodan broj.

$$n \cdot \sqrt{2} - n < n \Rightarrow n \cdot \sqrt{2} < 2 \cdot n \Rightarrow \sqrt{2} < 2.$$

Prema tome je  $\sqrt{2}$  iracionalan broj.  $\square$