

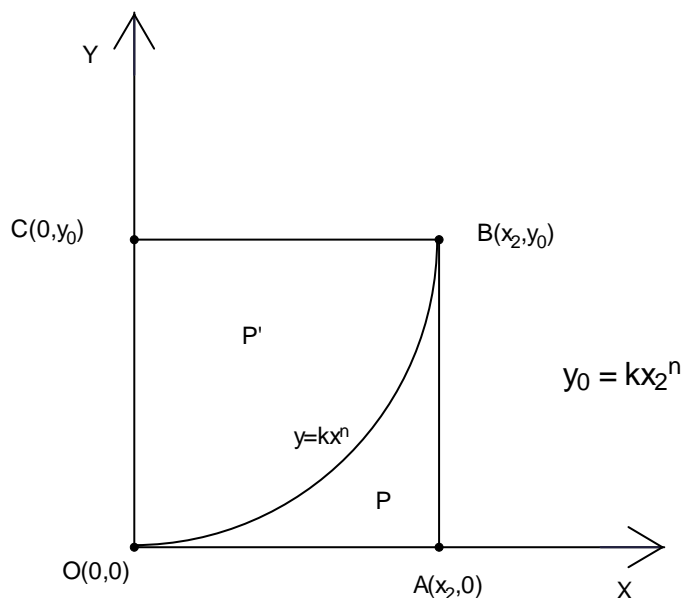
INTEGRAL I KRIVULJA $Y = KX^N$

MLADEN HALAPA, *Bjelovar*

Neka je u ravnini dan pravokutni Kartezijev koordinatni sustav i u njemu zadana neprekidna krivulja $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, za svaki $x \in [x_1, x_2]$. Površina geometrijskog lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$, dvama pravcima $x = x_1$ i $x = x_2$ te osi apscisa, $x_1 \leq x \leq x_2$, računa se:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} y dx .$$

Posebno promatrajmo slučaj kada je na segmentu $[0, x_2]$ zadana krivulja $y = kx^n$, gdje su $k, n \in \mathbf{R}$.



Sada je

$$P = \int_0^{x_2} kx^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot k \cdot x_2^{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot (x_2 \cdot kx_2^n)$$

pa zbog $y_0 = kx_2^n$ formula za površinu glasi:

$$P = \frac{1}{n+1} \cdot (x_2 \cdot y_0) . \quad (1)$$

Znači da je

$$P = \frac{1}{n+1} \cdot P_{OABC} ,$$

gdje je P_{OABC} površina pravokutnika OABC.

Površina geometrijskog lika omeđenog krivuljom $y = kx^n$, pravcem $y = y_0$ i osi ordinata jednostavno se izračuna:

$$P' = P_{OABC} - P = P_{OABC} - \frac{1}{n+1} \cdot P_{OABC} ,$$

$$P' = \frac{n}{n+1} \cdot (x_2 \cdot y_0) . \quad (2)$$

Primjer 1 (Zadatak 1631. iz [2], str. 156.)

Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = x^3$, pravcem $y = 8$ i osi OY.

Rješenje: $y = x^3 \Rightarrow n = 3$, $y_0 = 8$.

Broj x_2 je apscisa točke u kojoj se sijeku $y = x^3$ i $y = 8$.

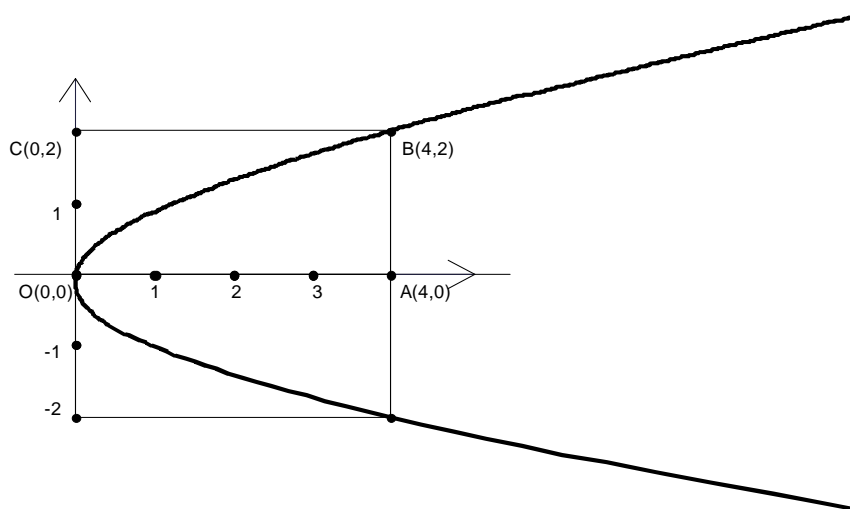
$$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x_2 = 2 .$$

Iz (2) slijedi

$$P' = \frac{n}{n+1} \cdot (x_2 \cdot y_0) = \frac{3}{3+1} \cdot (2 \cdot 8) = 12 .$$

Primjer 2 (Zadatak 7.6. iz [1], str. 123.)

Kolika je površina segmenta parabole $y^2 = x$ odsječenog pravcem $x = 4$?



Rješenje: Budući da je lik simetričan u odnosu na x-os, odredit ćemo površinu gornjeg dijela lika i pomnožiti s 2.

$$y^2 = x \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow n = \frac{1}{2} , \quad x_2 = 4 \Rightarrow y_0 = 4^{\frac{1}{2}} = 2 .$$

Iz (1):

$$P = \frac{1}{n+1} \cdot (x_2 \cdot y_0) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot (4 \cdot 2) = \frac{16}{3}$$

pa je ukupna površina $\frac{32}{3}$.

Primjer 3 (Zadatak 7.10. iz [1], str. 123.)

Kolika je površina lika omeđenog lukom parabole $y = \sqrt{x+1}$, osi apscisa i pravcem $x = 3$?

Rješenje: Translatiramo koordinatni sustav pomoću transformacije $t = x + 1$.

$$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow y = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow n = \frac{1}{2}, \quad x = 3 \Rightarrow t_2 = 4 \Rightarrow y_0 = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

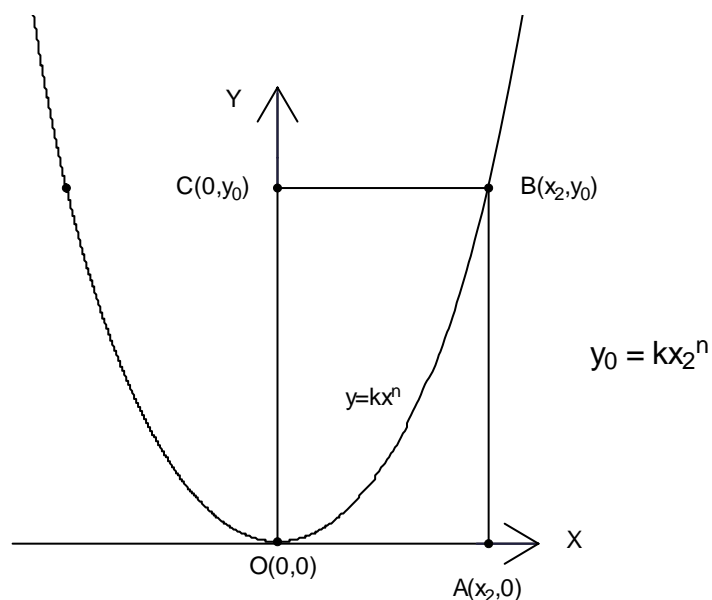
Zbog (1) je

$$P = \frac{1}{n+1} \cdot (t_2 \cdot y_0) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot (4 \cdot 2) = \frac{16}{3}.$$

U pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru volumen tijela nastalog rotacijom krivocrtnog trapeza omeđenog krivuljom $y = f(x)$, osi apscisa i dvama pravcima $x = x_1$ i $x = x_2$ oko x-osi ili y-osi dan je formulama

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx, \quad V_y = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} xy dx.$$

Analogno prijašnjem rezultatu izvode se formule za volumen kada je zadana krivulja oblika $y = kx^n$, a pravci su $x = 0$ i $x = x_2$.



$$V_y = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} xy dx = 2\pi \cdot \int_0^{x_2} xkx^n dx = \frac{2}{n+2} \cdot (x_2^2 \cdot \pi \cdot k \cdot x_2^n),$$

$$V_y = \frac{2}{n+2} \cdot (x_2^2 \cdot \pi \cdot y_0). \quad (3)$$

Znači:

$$V_y = \frac{2}{n+2} \cdot V_v ,$$

gdje je V_v volumen valjka polumjera x_2 i visine y_0 .

Slično se dobije:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi \cdot \int_0^{x_2} (kx^n)^2 dx = \frac{1}{2n+1} \cdot (k^2 x_2^{2n} \cdot \pi \cdot x_2) ,$$

$$V_x = \frac{1}{2n+1} \cdot (y_0^2 \cdot \pi \cdot x_2) . \quad (4)$$

Ovaj puta je

$$V_x = \frac{1}{2n+1} \cdot V_v ,$$

gdje je V_v volumen valjka polumjera y_0 i visine x_2 .

Primjer 4 (Zadatak 1689. iz [2], str. 163.)

Nađite volumen tijela nastalog rotacijom plohe omeđene semikubnom parabolom $y^2 = x^3$,
osi OX i pravcem $x = 1$ oko osi OX.

Rješenje: $y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow n = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

Zbog (4):

$$V_x = \frac{1}{2n+1} \cdot (y_0^2 \cdot \pi \cdot x_2) = \frac{\pi}{4} .$$

Primjer 5 (Zadatak 1690. iz [2], str. 163.)

Nađite volumen tijela nastalog rotacijom plohe omeđene semikubnom parabolom $y^2 = x^3$,
osi OX i pravcem $x = 1$ oko osi OY.

Rješenje: $y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow n = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

Iz (3):

$$V_y = \frac{2}{n+2} \cdot (x_2^2 \cdot \pi \cdot y_0) = \frac{2}{\frac{3}{2}+2} \cdot (1 \cdot \pi \cdot 1) = \frac{4\pi}{7} .$$

Primjer 6 (Zadatak 7.66. iz [1], str. 134.)

Izračunajte volumen rotacijskog tijela što nastaje rotacijom oko y-osi lika omeđenog
krivuljama: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Rješenje: $y = x^3 \Rightarrow n = 2$, $x_2 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

Zbog (3):

$$V_y = \frac{2}{n+2} \cdot (x_2^2 \cdot \pi \cdot y_0) = \frac{\pi}{2} .$$

Literatura

- [1] B.Dakić, N.Elezović: *Zbirka zadataka iz matematike za 4. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1999.
- [2] B.P. Demidović: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.