HERONOV TROKUT I BROJ Π

Mladen Halapa, *Bjelovar*

Trokut kojemu su stranice i površina cijeli brojevi zove se Heronov[1] trokut. Zanimljivo je da se pomoću takvog lika može približno odrediti broj π. Za tu svrhu koristit ćemo funkciju tangens i njezino svojstvo da za jako male vrijednosti argumenta x vrijedi

$$\mathrm{tg}\, x \approx x. \tag{1}$$

U računu služit ćemo se adicijskim teoremom za tangens:

$$tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}\ ,\ tg(x-y)=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\cdot tg\,y} \tag{2}$$

i identitetom:

$$tg\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \tag{3}$$

Trokut pomoću kojeg računamo približno vrijednost broja π ima duljine stranica a = 13, b = 14 i c = 15. Njega spominje Heron u svom najpoznatijem djelu *Metrika*. Pomoću Heronove formule

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},\ gdje\ \ je\ \ s=\frac{a+b+c}{2},$$

lako se odredi površina P = 84. Uporabom poučka o kosinusu izračunamo kosinuse kutova:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}=\frac{33}{65},\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}=\frac{5}{13}. \tag{4}$$

Iz identiteta (3) i jednakosti (4) dobiju se vrijednosti tangensa polovičnog kuta:

$$tg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1}{2},\quad tg\,\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}=\frac{4}{7},\quad tg\,\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}=\frac{2}{3}.$$

[1] Heron, starogrčki matematičar, živio u Aleksandriji vjerojatno u 1. stoljeću poslije Krista

Koristeći (2) nalazimo da je

$$tg\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}=\frac{7}{524},\quad tg\frac{4\alpha+\beta-4\gamma}{2}=\frac{148}{6811},\quad tg\frac{2\beta+3\gamma-6\alpha}{2}=\frac{46}{2253}.$$

Zbog (1) možemo pisati

$$\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}\approx 0.013358778,$$

$$\frac{4\alpha+\beta-4\gamma}{2}\approx 0.021729555,$$

$$\frac{2\beta+3\gamma-6\alpha}{2}\approx 0.020417221.$$

Svaku posljednju približnu jednakost pomnožimo s 2 pa dobijemo:

$$\alpha-2\beta+\gamma\approx 0.026717556,$$

$$4\alpha+\beta-4\gamma\approx 0.043459110,$$

$$-6\alpha+2\beta+3\gamma\approx 0.040834442.$$

Ako prvu relaciju množimo s 37, drugu s 27, a treću s 24 i sve ih zbrojimo, bit će:

$$\alpha + \beta + \gamma \approx 3.14197215.$$

Budući da je u trokutu

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

slijedi:

$$\pi \approx 3.14197215.$$

Točna vrijednost broja π na osam decimala iznosi 3. 14159265 pa je relativna pogreška

$$\left|\frac{3.14197215-3.14159265}{3.14159265}\right|\cdot 100\% = 0.012\%.$$