Različiti dokazi Heronove formule

Damjan Jovičić,
Jelena Beban-Brkić,
Zagreb

Jedan od važnih zadataka s kojim se često susrećemo je izračunavanje površine nekog lika. Ako je lik moguće rastaviti na trokute, tada se površina lika dobiva kao zbroj površina tih trokuta. Najčešće se površina računa iz poznatih duljina stranica ili se ove prethodno izračunavaju iz poznatih elemenata koji određuju trokut. U tom se slučaju za površinu koristi **Heronova* formula**:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, a, b, c – duljine stranica.

Napomenimo da je formulu poznavao i grčki matematičar *Arhimed* (287. – 212. prije Krista) koji je živio oko tri stoljeća prije Herona.

Da bi se primijenila formula, treba izračunati poluopseg s, sastaviti izraz $S = s(s-a)(s-b)(s-c)$ i iz njega izvaditi drugi korijen. Ako pri ruci imamo programabilno džepno računalo, cijeli posao je izvediv u relativno kratkom broju koraka. Evo kako bi to izgledalo ako na primjer raspolažemo s računalom SHARP 1403:

```
10: REM HERONOVA FORMULA
20: INPUT “a=”; A, “b=”; B, “c=”; C
30: IF A+B>C AND B+C>A AND C+A>B THEN
    GOTO 50
40: PRINT “POGREŠNO ZADANO”:GOTO 20
50: S=(A+B+C)/2
60: P=SQR(S*(S-A)*(S-B)*(S-C))
70: PRINT “POVRŠINA=”;P
80: END
```

Drugo i važnije pitanje je kako se **Heronova formula** izvodi te je li potrebno da učenici znaju taj

* Heron iz Aleksandrije, grčki matematičar za kojeg se vjeruje da je živio u prvom stoljeću, pisac djela iz optike i mehanike. Neke zanimljivosti o njemu na kraju teksta.

izvod, odnosno hoće li se on naći u prijedlogu državne mature. Mišljenja smo da bi završeni srednjoškolci trebali znati barem jedan od dokaza Heronove formule te da bi to mogao biti zadatak koji bi u obliku projekta učenici rješavali u grupama.

U ovom se članku bavimo izvodom **Heronove formule** u okviru različitih postupaka kojima se realizira osnovna ideja: *izračunati površinu kao funkciju stranica*.

Dokaz 1. Eliminacija trigonometrijske funkcije

Polazimo od formule za površinu

$$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \tag{1.1}$$

Želimo eliminirati funkciju $\sin\gamma$. U tu svrhu formulu (1.1) pišemo u obliku

$$4P^2 = a^2b^2 \sin^2\gamma. \tag{1.2}$$

Iz kosinusova poučka za stranicu c možemo pisati $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ odnosno $\cos^2\gamma = \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}$.

Nadalje je

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = 1 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2} \quad \text{ili}$$

$$\sin^2\gamma = \frac{(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{[2ab-(a^2+b^2-c^2)][2ab+(a^2+b^2-c^2)]}{(2ab)^2}.$$

Izraze u gornjim zagradama možemo pisati malo drukčije:

$$\sin^2\gamma = \frac{[c^2-(a^2-2ab+b^2)][(a^2+2ab+b^2)-c^2]}{(2ab)^2} \quad \text{ili}$$

$$\sin^2\gamma = \frac{[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]}{(2ab)^2} \quad \text{odnosno}$$

$$\sin^2\gamma = \frac{[c-(a-b)][c+(a-b)][(a+b)-c][(a+b)+c]}{(2ab)^2} \quad \text{tj.}$$

$$\sin^2\gamma = \frac{[c-a+b][c+a-b][a+b-c][a+b+c]}{(2ab)^2}.$$

Uvedemo li oznake

$$s = \frac{a+b+c}{2};\quad s-a = \frac{-a+b+c}{2};$$
$$s-b = \frac{a-b+c}{2};\quad s-c = \frac{a+b-c}{2}; \tag{1.3}$$

možemo pisati

$$\sin^2\gamma = \frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4a^2b^2} \tag{1.4}$$

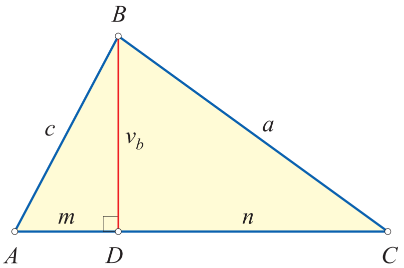
Uvrstimo li $\sin^2\gamma$ iz (1.4) u (1.2) dobivamo

$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, a odatle korjenovanjem izlazi $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Dokaz 2. Eliminacija visine

Polazimo od sljedeće formule za površinu trokuta:

$$P = \frac{b \cdot v_b}{2} \tag{2.1}$$



Slika 1.

Iz slike 1 vidimo da je

$m^2 = c^2 - v_b^2$, $n^2 = a^2 - v_b^2$, $m + n = b$ i $n = b - m$.

Nadalje je $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = b(2m-b) = c^2 - a^2$.

Želimo eliminirati v_b iz formule (2.1).

Uočimo da je iz posljednje formule, tj. $b(2m-b) = c^2 - a^2$ moguće odrediti $m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$, a potom i $n = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$.

Ako u izraz $v_b^2 = a^2 - n^2$ uvrstimo vrijednost za n dobivamo:

$$v_b^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2},$$

$$v_b^2 = \frac{[2ab - ((a^2+b^2)-c^2)][2ab + ((a^2+b^2)-c^2)]}{4b^2},$$

ili drukčije pisano

$$v_b^2 = \frac{[c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)][(a^2 + 2ab + b^2) - c^2]}{4b^2}, \text{ tj.}$$

$$v_b^2 = \frac{[c^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - c^2]}{4b^2},$$

$$v_b^2 = \frac{[c - a + b][c + a - b]\,[a + b - c]\,[a + b + c]}{4b^2}.$$

Uz oznake iz (1.3) možemo pisati da je

$$v_b^2 = \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)]}{4b^2},$$

odnosno

$$v_b^2 = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b}. \qquad (2.2)$$

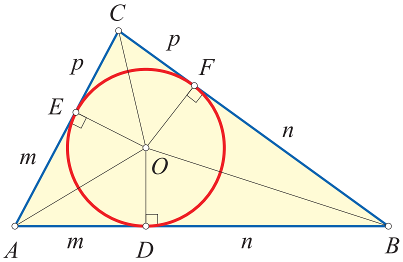
Ako v_b iz (2.2) uvrstimo u (2.1), dobivamo:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz 3. Uvođenje i eliminacija pomoćnih veličina

U torkut ΔABC upišimo kružnicu. Uvodimo pomoćne veličine m, n, p na sljedeći način (vidi sliku 2):

$$a = n + p$$
$$b = p + m$$
$$c = m + n$$
$$s = m + n + p.$$



Slika 2.

Nadalje je $\Delta ABC = \Delta AOB \cup \Delta BOC \cup \Delta COA$ pa je površina trokuta ΔABC jednaka

$$P = \frac{m+n}{2}r + \frac{n+p}{2}r + \frac{p+m}{2}r$$
$$= (m + n + p)\,r = sr. \qquad (3.1)$$

Iz trokuta ΔCEO je

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}},\ \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}} \qquad (3.2)$$

Prema (3.2) možemo pisati $\sin\gamma = \sin 2\,\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2rp}{r^2+p^2}$.

Na osnovu toga je

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}(p+n)(p+m)\frac{2rp}{r^2+p^2} \qquad (3.3)$$

Iz (3.1) i (3.3) dobivamo $(p+n)(p+m)\frac{2rp}{r^2+p^2} = rs$, odnosno $p\,(p+n)(p+m) = s(r^2+p^2)$.

Transformiramo li lijevu stranu u posljednjoj formuli možemo pisati $mnp+p^2(m+n+p) = sp^2+sr^2$ odnosno $mnp + sp^2 = sp^2+sr^2$, tj.

$$mnp = sr^2. \qquad (3.4)$$

Pomnožimo li (3.4) sa s dobivamo da je $smnp = s^2r^2$ i uvažimo li (3.1) možemo pisati

$$P^2 = smnp. \qquad (3.5)$$

Ako eliminiramo pomoćne veličine m, n, p iz (3.5) pozivajući se na relacije $m=s-a$, $n=s-b$ i $p=s-c$, dobivamo konačno da je $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ ili

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz 4. Upotreba Mollweideovih formula

U svakom trokutu vrijede *Mollweideove* formule (Karl Mollweide, njemački matematičar i astronom (1774.–1825.)):

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};\ \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};\ \frac{c+a}{b}$$
$$= \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (4.1)$$

Transformirajmo prvu formulu u (4.1) tako da **dodamo** jedinicu na obje strane:

$$\frac{a+b}{c} + 1 = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Kako je $\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, uvažavajući da je $s = \frac{a+b+c}{2}$ i $\cos x + \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$, možemo formulu $\frac{a+b+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ zapisati u obliku

$$\frac{s}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \qquad (4.2)$$

Na posve analogan način dolazimo i do sljedeće dvije formule:

$$\frac{s}{a} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad (4.\ 3)$$

$$\frac{s}{b} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}. \qquad (4.4)$$

Napomena: Relacije (4.3) i (4.4) možemo dobiti iz formule (4.2) cikličkom zamjenom $a \to b \to c \to a$, odnosno $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$.

Transformirajmo sada prvu formulu u (4.1) tako da *oduzmemo* jedinicu na obje strane. Bit će

$$\frac{a+b}{c}-1=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}-1 \Leftrightarrow \frac{a+b-c}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Kako je $\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, uvažavajući da je $s=\frac{a+b+c}{2}$ i $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, možemo formulu $\frac{a+b-c}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ zapisati u obliku

$$\frac{s-c}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{4.5}$$

Na posve analogan način ili cikličkom zamjenom iz (4.5) dobivamo još dvije formule:

$$\frac{s-a}{a}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{4.6}$$

i

$$\frac{s-b}{b}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}. \tag{4.7}$$

Iz formula (4.2), (4.6),(4.7) i (4.5) množenjem dobivamo

$$\frac{s}{c}\cdot\frac{s-a}{a}\cdot\frac{s-b}{b}\cdot\frac{s-c}{c}$$
$$=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}. \tag{4.8}$$

Ako formulu (4.8) pomnožimo s $cabc = bcca$ možemo pisati

$$s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot ca\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}. \tag{4.9}$$

Desna strana u gornjoj formuli (4.9) može se zapisati u obliku

$$bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot ca\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}ca\sin\beta=P^2.$$

Na taj način dobivamo da je $s(s-a)(s-b)(s-c)=P^2$ i konačno, $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Dokaz 5. Upotreba trigonometrijskog identiteta

Dokaz provodimo u dva koraka. U prvom dokazujemo jednu lemu, a u drugom koraku, na osnovu leme dokazujemo **Heronovu formulu**.

Lema. Ako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, onda je

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Drugim riječima, lema tvrdi da je suma kotangensa polovica kutova jednaka produktu kotangensa polovica kutova.

Dokaz leme.

Iz $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ slijedi da je

$$\gamma=\pi-(\alpha+\beta),\ \frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2},\ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

pa možemo pisati

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$
$$=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{5.1}$$

Preuredimo li desnu stranu u formuli (5.1), slijedi

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{5.2}$$

Nakon zbrajanja članova na desnoj strani jednakosti (5.2) dobivamo

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{5.3}$$

Uočimo li da je desna strana u (5.3) drugi zapis formule, zaključujemo da je ispunjeno

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

čime je lema dokazana. ■

Vratimo se dokazu formule.

Prema slici 2 (iz definicije funkcije ctg) možemo pisati

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{p}{r}+\frac{n}{r}+\frac{m}{r}=\frac{s}{r}, \qquad (5.4)$$

dok je s druge strane,

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{p}{r}\cdot\frac{n}{r}\cdot\frac{m}{r}=\frac{pnm}{r^3}. \qquad (5.5)$$

Iz formula (5.4) i (5.5) a na osnovu gornje leme vrijedi:

$$r^2s = pnm \iff r^2s^2 = spnm \iff P^2 = spnm. \qquad (5.6)$$

Eliminiramo li p, n, m iz (5.6), uzevši u obzir relacije $p = s - a$, $n = s - b$, $m = s - c$,dobivamo konačno, opet prema (5.6) da je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Umjesto zaključka primijetimo da je za dokaze 1, 3, 4 i 5 potrebno poznavanje osnovnih trigonometrijskih funkcija i relacija, stoga se ne bi mogli izvoditi na nivou osnovnoškolske nastave, za razliku od dokaza 2 koji se zasniva na Pitagorinu teoremu (vidi o tome u [1]) i može poslužiti kao ilustracija primjene istog teorema.

Konačno, navedimo i podatak da je formula, o kojoj se u ovom tekstu radi, dokazana u prvoj knjizi *Metrika* koju je napisao Heron iz Aleksandrije oko 75. godine i koja je otkrivena u Konstantinopolu tek 1896. (više o tome u [2]). U citiranim knjigama imamo različite podatke o životu Herona. Tako se u [1] navodi da je živio između 250. i 150. godine prije Krista, dok je prema [2] živio u prvom stoljeću poslije Krista.

Literatura:

[1] Svetozar Kurepa: MATEMATIKA 1 za prvi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[2] Michael Sullivan: PRECALCULUS, Collier Macmillan Publishers, London, 1987.

[3] Damjan Jovičić: JOŠ JEDAN DOKAZ HERONOVE FORMULE, MFL X, God. XLV, Zagreb, 1994.-95.

Evo, dragi čitatelji, ovih pola stranice iskoristit ćemo za prikaz jednog lijepog zadatka Huge Steinhausa o čijoj se knjižici “Sto zadataka iz elementarne matematike” govori na stranicama ovog broja MiŠ-a.

Opeka

Kako ravnalom izmjeriti duljinu prostorne dijagonale opeke koja ima oblik kvadra? Rješenje mora biti praktično, primjenjivo u praksi i ne smije biti primijenjen nikakav račun pa niti Pitagorin poučak.

Evo rješenja: Prislonimo dvije jednake opeke jednu do druge pri jednom kutu pravokutnog stola. Zatim odmaknemo opeku pri samom kutu te izmjerimo duljinu dužine *MN*. I ta duljina jednaka je duljini prostorne dijagonale opeke.