Intuitivni pristup geometrijskoj vjerojatnosti

Vedran Kojić, Zagreb

Zasigurno ste svi vi koji čitate ovaj članak barem čuli, ako ne i zaigrali društvenu igru "Monopoly". Pravila igre nisu komplicirana, a pored podloge s ucrtanim poljima, novčanica različitih vrijednosti, nekoliko figurica i par drugih rekvizita, potrebne su nam dvije igraće kockice. Svaki igrač baca kockice, a zbroj brojeva koji su pali predstavlja broj polja za koji igrač pomakne svoju figuricu. Poznato je da je **sretnik** onaj igrač koji pri bacanju kockica dobije par šestica, jer mu to omogućuje ponovno bacanje. No, zašto je još posebno podebljano *sretnik*? Naravno, osim što će mu to uglavnom omogućiti bržu i sigurniju pobjedu, ako pogledamo kolika je *šansa* da padne par šestica, u usporedbi s bilo kojom drugom kombinacijom, evo mu još jedan razlog za dodatnu sreću! Naime, bačene kockice mogu dati rezultate

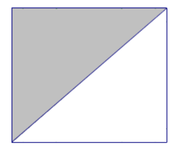
$$(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,...,(6,6),$$

gdje prva (odnosno druga) koordinata uređenih parova predstavlja dobiveni broj na prvoj (odnosno drugoj) kockici. Dakle, ukupan broj svih mogućih ishoda je 36, pa je *šansa* da se dobije par šestica $1:36$ ($\approx 2.78\%$) što je dosta *mala šansa*, te se igrač koji dobije šestice s pravom smatra sretnikom!

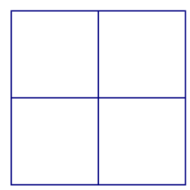
Ovo je bio jednostavan motivacijski primjer za uvođenje pojma **vjerojatnosti**, kojeg smo gore, uočite, nazvali terminom *šansa*. No, cilj daljnjeg sadržaja nije precizno definirati sami pojam vjerojatnosti u matematici, već na nizu zanimljivih primjera, u nadi da će ih i oni kojima matematika nije u centru interesa lako razumjeti, intuitivno dati objašnjenje te vidjeti kako se vjerojatnost računa. Osim u sportskim klađenjima, igrama na sreću i sličnim događanjima iz svakodnevnice, vjerojatnost je našla svoje mjesto i u geometriji. Prvih par primjera ilustrira o čemu je riječ.

Primjer 1. *Pravokutnik je podijeljen dijagonalom na dva trokuta - sivi i bijeli, kao što prikazuje Slika 1, iz kojeg slučajnim odabirom biramo neku točku. Kolika je vjerojatnost da je izabrana točka unutar bijelog trokuta?*

Rješenje: Naravno, bez puno razmišljanja, odgovor je $\frac{1}{2}$ (odnosno 50%).



Slika 1: Sivi i bijeli trokuti



Slika 2: Kvadratići

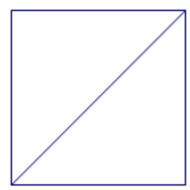
Primjer 2. *Neka je sada kvadrat podijeljen na četiri kvadratića kao na Slici 2. Kolika je vjerojatnost da ćemo slučajnim odabirom izabrati točku unutar gornjeg lijevog kvadratića?*

Rješenje: Opet, bez puno muke, odgovor je $\frac{1}{4}$ (odnosno 25%).

Kao što vidimo, vjerojatnost smo izrazili putem postotka, odnosno razlomka, tj. omjera *veličine povoljnog događaja* i *veličine svih mogućih događaja*. Pri tom pod frazom *veličina povoljnog događaja*, u igri "Monopoly" mislimo na ukupan broj mogućnosti da se baci par šestica: (6,6) (a *veličina svih mogućih događaja* se odnosi na broj svih mogućih ishoda bacanja dviju kockica: $(1,1),(1,2),....,(6,5),(6,6)$), dok u **Primjerima 1.** i **2.** mislimo na površinu bijelog trokuta, odnosno gornjeg lijevog kvadratića (a *veličina ukupnog događaja* je površina čitavog pravokutnika, tj. kvadrata).

A zapitajmo se sljedeće:

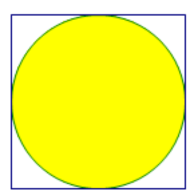
Pitanje 3. *Ako iz kvadrata, čiji su vrhovi smješteni u točke* $(0,0), (1,0), (1,1)$ *i* $(0,1)$ *koordinatnog sustava, slučajnim izborom biramo točku, kolika je vjerojatnost da prva i druga koordinata izabrane točke budu jednake, tj. da točka leži na dijagonali?*



Slika 3: Dijagonala

Bez obzira znate li ili ne, odgovor i pripadno objašnjenje ubrzo slijede. No, pogledajmo prije svega, još par primjera.

Primjer 4. *Slučajno biramo točku iz kvadrata stranice duljine 1. Kolika je vjerojatnost da izabrana točka upadne u krug upisan tom kvadratu?*



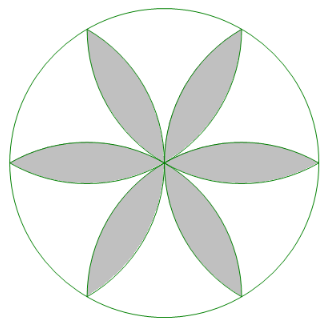
Slika 4: Omjer kruga i kvadrata

Rješenje: U okviru razmatranja neposredno nakon **Primjera 2.**, računamo ovako: površina kruga je jednaka $(\frac{1}{2})^2\pi$, a kvadrata očito 1, pa je odgovor jednak $\frac{\pi}{4}$.

Uočimo u ovom rezultatu da vjerojatnost ne mora nužno biti racionalan broj.

Primjer 5. *Probajte za vježbu izračunati kolika je vjerojatnost da će slučajno izabrana točka iz kruga radijusa 1, biti baš iz sivog područja sa Slike 5.*

Primjer 6. *Iz segmenta* $[0,2]$ *slučajno biramo neki broj. Kolika je vjerojatnost da je izabrani broj manji ili jednak od* $\frac{1}{3}$*?*



Slika 5: Latice

Rješenje: Slično kao u **Primjeru 4.**, duljina segmenta $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ je upravo $\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$, a duljina segmenta $[0, 2]$ jednaka je 2. Stoga je odgovor $\dfrac{\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{1}{6}$.

Sljedeći primjer je povezan s odgovorom na **Pitanje 3.**

Primjer 7. *Kolika je vjerojatnost da iz segmenta* $[-1, 1]$ *izaberemo broj* 0*?*

Rješenje: Jednostavnosti radi, označimo događaj *izabiranje broja 0* skupom $\{0\}$, kojeg možemo prikazati kao presjek beskonačno mnogo prikladnih segmenata, tj. vrijedi

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right].$$

Ovu činjenicu možete prihvatiti intuitivno, a nije ju teško ni samostalno dokazati, no detalji se mogu vidjeti u navedenoj literaturi. Sličnim računom kao u **Primjeru 6.** dobivamo da vjerojatnost da je izabrani broj unutar segmenta $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ iznosi

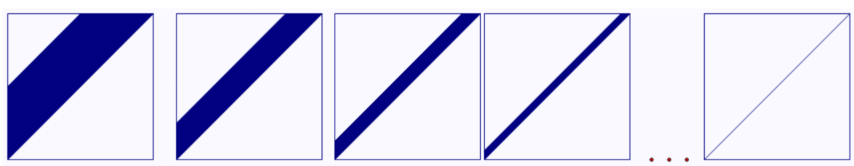
$$P\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{\frac{1}{n} - (-\frac{1}{n})}{1 - (-1)} = \frac{1}{n}.$$

Stoga, neformalno, kako povećavamo broj n, to se duljina segmenata $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ smanjuje, dok u beskonačnosti ta duljina ne prijeđe u nulu. Malo formalnije, imamo:

$$P(\{0\}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

U računu smo prešutno koristili *svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na padajuće nizove skupova*. Dakle, vjerojatnost da iz segmenta $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ izaberemo broj 0 jednaka je nuli. Isti zaključak vrijedi i za bilo koji drugi segment iz kojeg biramo neki broj.

Konačno, odgovor na **Pitanje 3.** je također nula. Kao što Slika 6 pokazuje, dijagonalu kvadrata možemo prikazati kao presjek beskonačno mnogo prikladno odabranih trapeza, koji u beskonačnosti jeste dijagonala. Kako se površina trapeza sve više smanjuje, to ona u beskonačnosti prijeđe u nulu, pa je zaključak očigledan. Za vježbu probajte formalno provesti račun kao u **Primjeru 7.** (s tim da pazite da se ovdje radi o površinama, a ne duljinama).



Slika 6: Aproksimacija dijagonale

Neka nas ne zbunjuje pitanje *kako je ostvarivo nešto što ima vjerojatnost nula?* Iako na prvi pogled izgleda kontradiktorno, ipak nema kontradikcije. Dakle, uočite da **postoje** mogućnosti (tj. događaji) čija je vjerojatnost nula, pa stoga, ako je vjerojatnost nekog događaja nula, to ne znači da je on neostvariv, odnosno da se radi o praznom skupu.

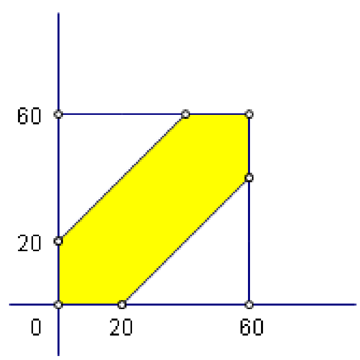
Naglasimo još da svi oni koji su odmah na **Pitanje 3.** odgovorili *…vjerojatnost je nula…* , a pritom dali objašnjenje *… hm pa … to je tako jer dijagonala nema površinu…* imali su donekle pravo. U biti, u matematici se na određeni način definira pojam površine (mi to ovdje nećemo iznositi), te se može pokazati da dijagonala <u>ima</u> površinu i da je ta <u>površina jednaka nuli</u>. Štoviše, vrijedi da točka ima **duljinu** nula, da točka i npr. kružnica imaju **površine** nula, te da točka, kružnica i npr. sfera imaju **volumene** nula (no budimo oprezni, jer u ravnini **postoje skupovi točaka koji <u>nemaju površinu</u> !!!**).

Slijedi još nekoliko zanimljivih ilustracija geometrijske vjerojatnosti.

Zadatak 8. *Ivica i Marica su za večeras dogovorili sastanak na određenom mjestu. Tko prvi od njih dvoje dođe, čekat će najviše* $20\,min$ *ono drugo, a potom otići. Ako se zna da će oboje sigurno doći na dogovoreno mjesto u neko slučajno doba između* 8 *i* $9\,h$ *navečer, izračunajte vjerojatnost da se Ivica i Marica sastanu.*

Rješenje: Dogovorimo se da uređeni par (x, y) označava vrijeme kad je tko došao između 8 i $9\,h$. Na primjer, $(15, 45)$ predstavlja da je Ivica došao u $20:15$ te Marica u $20:45$ (uočite da se u ovom primjeru oni nisu sastali jer je razlika između dolazaka veća od $20\,\text{min}$).
Stoga, oni će se sastati ako je $|x - y| \leq 20$. Nacrtamo li to u koordinatnom sustavu, kao na Slici 7 , žuto područje u oznaci A, predstavlja događaj da su se Ivica i Marica sastali. Lagano slijedi kolika je vjerojatnost od A:

$$P(A) = \frac{60^2 - 2\,\frac{(60-20)^2}{2}}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

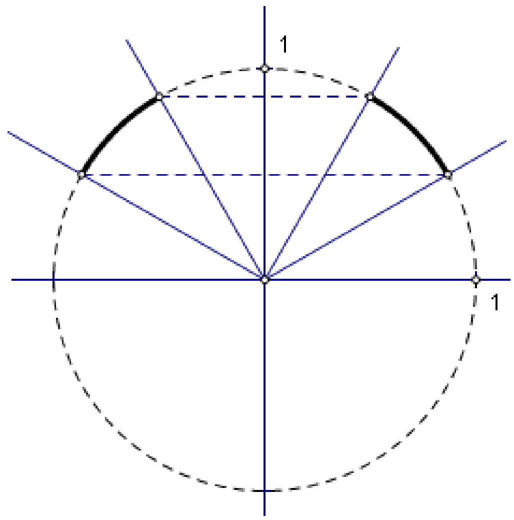


Slika 7: Ivica i Marica

Zadatak 9. *Kolika je vjerojatnost da za slučajno odabrani kut* $\alpha \in [0, 2\pi]$ *vrijedi* $\frac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$?

Rješenje: Nije teško doći na ideju da prvo treba vidjeti za koje brojeve α iz danog segmenta slijedi zadana nejednakost. Sa Slike 8 lako vidimo da je to za $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Uz oznaku $A = \{\alpha \in [0, 2\pi] : \frac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, slijedi da je

$$P(A) = \frac{(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + (\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3})}{2\pi - 0} = \frac{1}{6}.$$



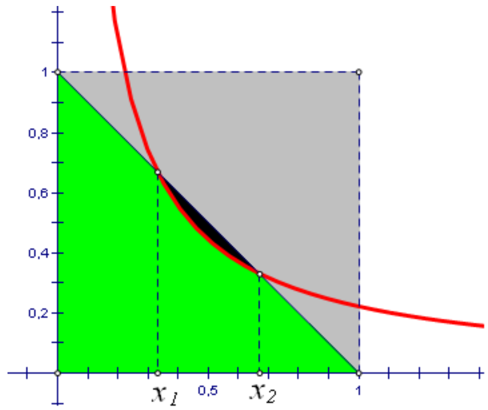
Slika 8: Jedinična kružnica

Zadatak 10. *Iz segmenta* $[0,1]$ *se slučajno i nezavisno biraju brojevi* x *i* y*. Izračunajte vjerojatnost da za* x *i* y *vrijedi* $x+y \leq 1$, $xy \leq \frac{2}{9}$.

Rješenje: Rješavanjem sustava jednadžbi $x+y=1$, $xy=\frac{2}{9}$, dobijemo kvadratnu jednadžbu $x^2-x+\frac{2}{9}=0$, čija su rješenja $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$. No, nas zanimaju nejednakosti, pa uočite da se one postižu u svim točkama zelenog područja sa Slike 9. Stoga, čim izračunamo površinu A zelenog područja unutar kvadrata duljine 1, gotovi smo jer je upravo to i vrijednost tražene vjerojatnosti. Označimo li površinu slovom π dobijemo

$$\pi(A) = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-x)\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x}\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} (1-x)\,dx =$$

$$-\frac{(1-x)^2}{2}\bigg|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\ln|x|\bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - \frac{(1-x)^2}{2}\bigg|_{\frac{2}{3}}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$$



Slika 9: Kolika je površina zelenog područja?

Na kraju se nalazi jedan (ali vrijedan!) zadatak za vježbu.

Zadatak 11. *Neka je* $a > 0$ *i neka su brojevi* b *i* c *slučajno odabrani brojevi iz segmenata* $[-2a, 2a]$, $\left[-a^2, a^2\right]$ *redom. Ako znamo da su rješenja* x_1, x_2, *kvadratne jednadžbe* $x^2 + bx + c = 0$, *realna, izračunajte vjerojatnost da je* $|x_{1,2}| \leq a$.

Rezultat: Tražena vjerojatnost je $\frac{1}{4}$.

Literatura

N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.