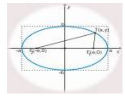
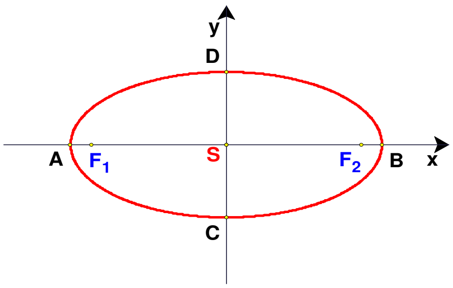
ELIPSA (m©h)



elipsa



elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od dvije zadane (fiksne) točke te ravnine stalan (konstantan), središte elipse S(0, 0)

žarišta ili fokusi: $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$

vrhovi ili tjemena: A(– a, 0), B(a, 0), C(0, – b), D(0, b)

velika ili glavna os elipse: $|AB| = 2a$

mala ili sporedna os elipse: $|CD| = 2b$

velika ili glavna poluos elipse: $|AS| = |SB| = a$

mala ili sporedna poluos elipse: $|CS| = |SD| = b$

linearni ekscentricitet elipse: $|F_1S| = |SF_2| = e$, $e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}$

numerički ekscentricitet elipse: $\varepsilon = \dfrac{e}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $e < a \Rightarrow \varepsilon < 1$

parametar elipse

tetiva elipse koja prolazi fokusom i okomita je na veliku os

duljina parametra: $2p = \dfrac{2\cdot b^2}{a}$, poluparametar: $p = \dfrac{b^2}{a}$

osna (kanonska) jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$$

vršna jednadžba elipse

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$

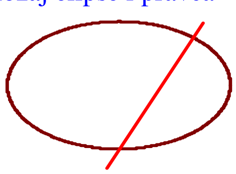
parametarska jednadžba elipse

$$x = a \cdot \cos t \quad , \quad y = b \cdot \sin t \quad , \quad t - \text{parametar}$$

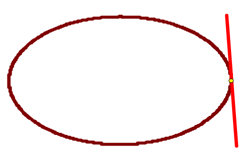
jednadžba elipse sa središtem S(p, q), a osi 2a i 2b paralelne su s koordinatnim osima

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

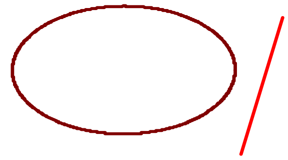
međusobni položaj elipse i pravca



pravac je sekanta elipse



pravac je tangenta elipse



pravac ne siječe elipsu

presjek pravca i elipse

traže se njihove zajedničke točke (ako postoje)

treba riješiti sustav jednadžbi

$$\left.\begin{array}{r} y = kx + l \\ b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{uvrstimo y iz prve} \\ \text{u drugu jednadžbu} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{nakon sređivanja dobijemo} \\ \text{kvadratnu jednadžbu} \end{array}\right):$$

- ako jednadžba ima dva realna rješenja, onda pravac siječe elipsu u dvije točke
- ako jednadžba ima dvostruko realno rješenje, onda je pravac tangenta
- ako jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja, onda se pravac i elipsa ne sijeku

uvjet dodira pravca y = k · x + l i elipse $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$

$$a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2$$

koordinate dirališta

$$D\left(-\frac{k \cdot a^2}{l}, \frac{b^2}{l}\right)$$

uvjet dodira pravca Ax + By + C = 0 i elipse $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$

$$A^2 \cdot a^2 + B^2 \cdot b^2 + C^2 = 0$$

jednadžba tangente u točki T(x_0, y_0) elipse

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad b^2 \cdot x_0 \cdot x + a^2 \cdot y_0 \cdot y = a^2 \cdot b^2$$

jednadžba normale u točki T(x_0, y_0) elipse

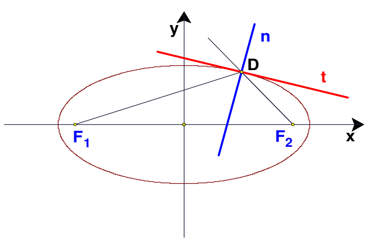
$$y - y_0 = \frac{a^2 \cdot y_0}{b^2 \cdot x_0} \cdot (x - x_0)$$

površina elipse

$$P = a \cdot b \cdot \pi$$

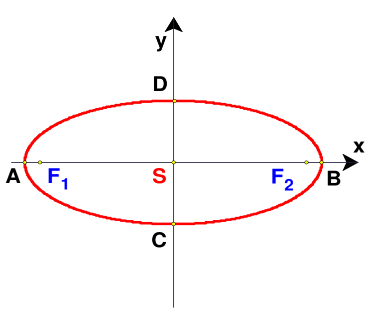
simetričnost

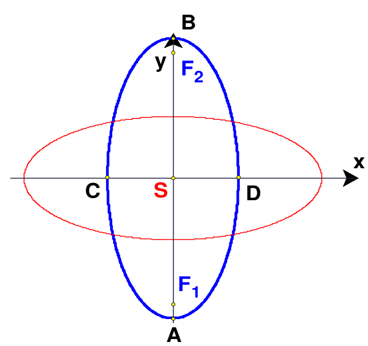
- elipsa ima dvije osi simetrije
- elipsa ima jedno središte simetrije



tangenta i normala na elipsu simetrale su vanjskog i unutarnjeg kuta među radijus – vektorima dirališta: $\vec{F_1D}$ i $\vec{F_2D}$

žarišta i koordinatne osi





ako su žarišta F_1 i F_2 na x-osi jednadžba elipse je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ako su žarišta F_1 i F_2 na y-osi jednadžba elipse je:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

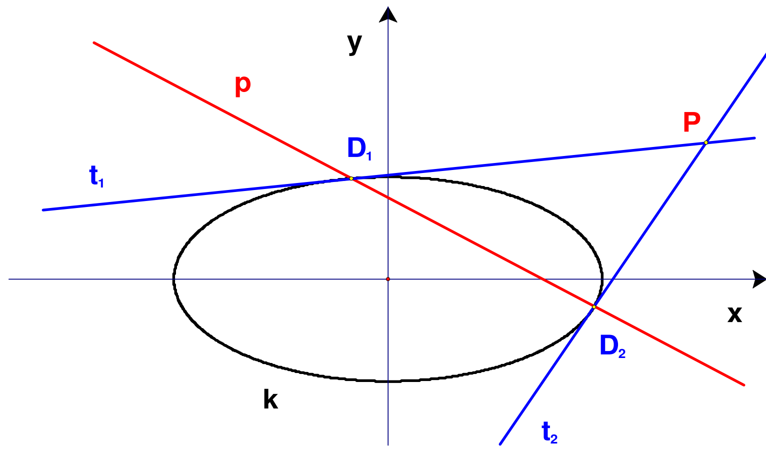
prvi Keplerov zakon

planet se kreće oko Sunca po elipsi, pri čemu se Sunce nalazi u jednom žarištu elipse

Jednadžba elipse kojoj su osi paralelne s koordinatnim osima, a koordinate središta su S(p, q)

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

pol i polara elipse



Polara je spojnica dirališta D_1 i D_2 tangenata povučenih iz točke P na elipsu k.
Pravac p je polara točke P s obzirom na elipsu k.
Točka P je pol pravca p (polare) s obzirom na elipsu k.
Jednadžba polare točke P s obzirom na elipsu k glasi:

- $$\left.\begin{array}{l} b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \\ P(x_0,\ y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow b^2\cdot x_0\cdot x+a^2\cdot y_0\cdot y=a^2\cdot b^2$$
- $$\left.\begin{array}{l} b^2\cdot (x-p)^2+a^2\cdot (y-q)^2=a^2\cdot b^2 \\ P(x_0,\ y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow b^2\cdot (x_0-p)\cdot (x-p)+a^2\cdot (y_0-q)\cdot (y-q)=a^2\cdot b^2$$