METODA DVIJU POGREŠNIH PRETPOSTAVKI

Mladen Halapa, *Bjelovar*

Sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice može se rješavati raznim postupcima. U ovom članku opisat ćemo metodu kojom su matematičari stare Kine rješavali sustave 2 x 2. Njezino ime je *metoda dviju pogrešnih pretpostavki.* Naziv je vrlo sugestivan jer za dvije po volji odabrane vrijednosti nepoznanice x dobijemo točan rezultat. Neka je zadan sustav

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Pretpostavimo da su x' i x'' dva rješenja. To, naravno, nije točno jer smo brojeve napamet odredili. Za odabrane x' i x'' nađemo pripadne y' i y'' iz prve jednadžbe sustava (1)

$$y' = \frac{c_1 - a_1 x'}{b_1}$$

$$y'' = \frac{c_1 - a_1 x''}{b_1},$$

$$b_1 \neq 0.$$

Sada računamo brojeve n_1 i n_2 po formulama

$$n_1 = c_2 - a_2 x' - b_2 y', \tag{2}$$

$$n_2 = a_2 x'' + b_2 y'' - c_2. \tag{3}$$

Tvrdimo da je rješenje sustava (1) oblika:

$$x = \frac{n_1 x'' + n_2 x'}{n_1 + n_2},$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1},$$

$$n_1 + n_2 \neq 0, \quad b_1 \neq 0.$$

Opće rješenje sustava (1) računamo po formuli

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Dovoljno je pokazati

$$\frac{n_1 x'' + n_2 x'}{n_1 + n_2} = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Za proizvoljne x' i x'' dobili smo, uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava (1), pripadne y' i y'':

$$\begin{aligned} a_1x' + b_1y' &= c_1, \\ a_1x'' + b_1y'' &= c_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Oduzmemo jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1(x' - x'') + b_1(y' - y'') &= 0, \\ y' - y'' &= \frac{a_1(x'' - x')}{b_1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ako prvu jednakost sustava (4) pomnožimo brojem y'' i oduzmemo od nje drugu jednakost pomnoženu sa y', rezultat te operacije bit će:

$$a_1x' + b_1y' = c_1 \; / \; \cdot y'',$$

$$a_1x'' + b_1y'' = c_1 \; / \; \cdot \left(-y'\right),$$

$$y''x' - y'x'' = \frac{c_1\left(y'' - y'\right)}{a_1},$$

što zbog (5) daje

$$y''x' - y'x'' = \frac{c_1(x' - x'')}{b_1}. \tag{6}$$

Zbrojimo li jednakosti (2) i (3) imamo:

$$n_1 + n_2 = a_2(x'' - x') + b_2(y'' - y').$$

Uvrstimo $y'' - y'$ iz relacije (5) u gornji izraz

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= a_2\left(x'' - x'\right) + \frac{b_2a_1\left(x' - x''\right)}{b_1}, \\ n_1 + n_2 &= \frac{\left(x'' - x'\right)\left(b_1a_2 - b_2a_1\right)}{b_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Napišimo ponovno jednakosti (2) i (3)

$$n_1 = c_2 - a_2x' - b_2y' \; / \cdot x''$$

$$n_2 = a_2x'' + b_2y'' - c_2 \; / \cdot x'$$

$$\left.\begin{aligned} n_1 \cdot x'' &= c_2 \cdot x'' - a_2 \cdot x' \cdot x'' - b_2 \cdot y' \cdot x'' \\ n_2 \cdot x' &= a_2 \cdot x'' \cdot x' + b_2 \cdot y'' \cdot x' - c_2 \cdot x' \end{aligned}\right\} +$$

$$n_1 x'' + n_2 x' = c_2\left(x'' - x'\right) + b_2\left(y'' x' - y' x''\right).$$

Zbog (6) konačno se dobije

$$n_1 x'' + n_2 x' = \frac{\left(x'' - x'\right)\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right)}{b_1}. \qquad (8)$$

Podijelimo jednakost (8) sa (7):

$$\frac{n_1 x'' + n_2 x'}{n_1 + n_2} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Tvrdnja je dokazana.

Ako pri izboru brojeva x' i x'' pogodimo rješenje, npr. x' je rezultat, očigledno je (x', y') rješenje sustava (1):

$$n_1 = 0,$$

$$x = \frac{n_1 x'' + n_2 x'}{n_1 + n_2} = x'$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x'}{b_1} = y'.$$

Primjer:

$$5x + 2y = 19,$$

$$3x + 4y = 17.$$

Pretpostavimo da su $x' = 1$ i $x'' = 4$:

$$y' = \frac{19 - 5\cdot 1}{2} = 7,$$

$$y'' = \frac{19 - 5\cdot 4}{2} = -0.5,$$

$$n_1 = 17 - 3\cdot 1 - 4\cdot 7 = -14,$$

$$n_2 = 3\cdot 4 + 4\cdot(-0.5) - 17 = -7,$$

$$x = \frac{n_1 x'' + n_2 x'}{n_1 + n_2} = 3,$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = 2,$$

$$(x, y) = (3,\ 2).$$