Cavalierijeva načela

Branimir Dakić, Zagreb

U 14. stoljeću u talijanskoj je Sieni osnovan novi svećenički red poznat kao Jezuati. Godine 1367. papa Urban priznao je djelovanje ovog reda čija je glavna skrb bila pomoć pogođenima od "crne smrti" (kuge) što je tada harala diljem Europe. Jezuatima je 1613. pristupio tek 15-godišnji Bonaventura Cavalieri koji je pod okriljem ovoga reda proveo čitav svoj život. Vrlo se često u literaturi može naći da je Cavalieri bio Jezuit, što je netočno, a posljedica je sličnosti naziva ovih dvaju redova. Bonaventura Cavalieri rođen je u Milanu 1598. Bio je Galilejev učenik, a djelovao je na Sveučilištu u Bologni sve od 1629. pa do smrti godine 1647. Bio je jedan od najutjecajnih matematičara svoga vremena, a bavio se trigonometrijom, geometrijom, optikom, astronomijom i astrologijom. Svjestan velikog značenja logaritama zaslužan je za njihovo rano prihvaćanje u talijanskim matematičkim krugovima.

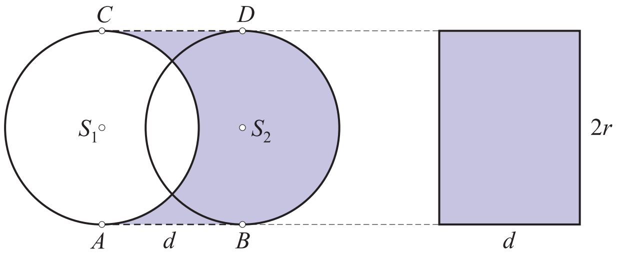
Cavalieri je objavio više djela: *Lo Specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche* (1632.), *Directorium generale uranometricum in quo trigonometri fundamenta ac regul demonstrantur* (1632.), *Rota planetaria* (1640.), *Trigonometria plana et sphrica linearis et logarithmica* (1635.). No najpoznatije mu je djelo *Geometria indivisibilibus continuorum nov qudam ratione promota* tiskana prvi put 1635. Djelo je posvećeno jednoj specifičnoj metodi bliskoj metodi ekshaustije koju su primjenjivali starogrčki matematičari, posebice Demokrit i Arhimed. Premda je knjiga naišla na žestoke kritike, prije svih švicarskog matematičara Paula Guldina (1577. – 1643.), njezina se objava u povijesti matematike danas drži velikim događajem. Na nju se nadovezuju kasniji radovi mnogih matematičara, posebice Keplera. Knjiga je pisana suviše verbalistički i nije jednostavno razobličiti i dokučiti detalje Cavalierijevih postupaka. Cavalieri slijedi svoju ideju nedjeljivosti. Naime, geometrijski se likovi promatraju kao strukture satkane od nedjeljivih elemenata: točaka tankih niti ili ravnih slojeva. Tako je svaka dužina unija nedjeljivih točaka, ravniniski lik satkan je od beskonačno mnogo tankih i međusobno paralelnih dužina, a svaki je prostorni oblik slog beskonačno tankih i međusobno paralelnih slojeva. Nakon takvog pristupa, ističu se dva načela, od kojih je drugo poopćenje prvog, a u srednjoj se školi prihvaćaju i primjenjuju bez dokaza.

Prvo Cavalierijevo načelo:

Ako pri presijecanju dvaju likova u ravnini skupom paralelnih pravaca u svakom pojedinom slučaju dobijemo dvije dužine čije su duljine u istom omjeru, onda su u istom omjeru i površine tih dvaju likova.

Prikažimo na nekoliko jednostavnih primjera kako je učinkovito ovo Cavalierijevo načelo.

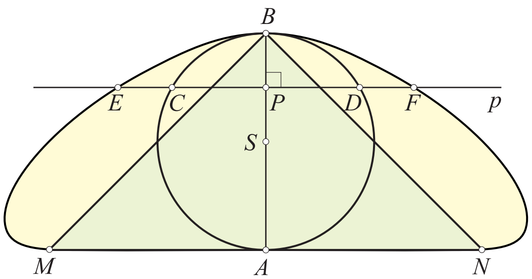
Primjer 1. Neka je dan krug polumjera r. Translatiramo taj krug za dužinu duljine d i promotrimo lik L koji je trag kruga pri toj translaciji (na slici je osjenčan). Kolika je njegova površina?



Slika 1.

Konstruirajmo pravokutnik čija je osnovica duga d, a druga stranica ima duljinu $2r$. Površina tog pravokutnika jednaka je $P = 2rd$. No, onda je, prema *prvom Cavalierijevu načelu* tomu jednaka i površina lika čiju površinu tražimo. Zbog čega? Presječemo li lik L i pravokutnik bilo kojim pravcem paralelnim pravcu AB, duljine odsječaka tog pravca unutar lika L i pravokutnika bit će uvijek iste. Ovaj lijep i jednostavan primjer zorno ilustrira Cavalierijeve ideje.

Primjer 2. Promotrimo sljedeću konstrukciju: Nacrtajmo kružnicu promjera $2r$. Neka je $\overline{AB}$ neki promjer ove kružnice. Pravac p okomit na $\overline{AB}$ siječe kružnicu u točkama C i D, a dužinu $\overline{AB}$ siječe u točki P. Od točke C ulijevo i od točke D udesno odredimo na pravcu p točke E i F tako da je $|CE| = |DF| = |BP|$. Provedemo li opisani postupak za sve pravce paralelne pravcu p, dobit ćemo krivulju u obliku gljive.



Slika 2.

Ako je zadan r, kolika je površina dijela ravnine koji je omeđen ovom krivuljom?

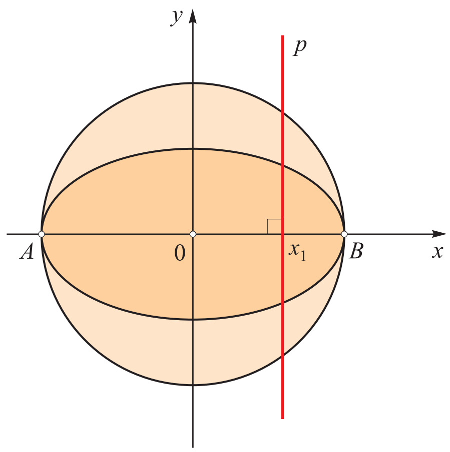
Kako bismo riješili taj zadatak, konstruirat ćemo jednostavniji lik složen od nedjeljivih koje su sukladne ovima od kojih je satkana gljiva. Umjesto da dužinu $\overline{BP}$ nanosimo po pravcu p od kružnice ulijevo i udesno, nanesimo je ulijevo i udesno od točke P. Tako ćemo dobiti pravokutni trokut ΔMNB čija je površina jednaka površini gljive bez površine kruga i iznosi $4r^2$.

Površina gljive jednaka je onda:

$$P = 4r^2 + r^2\pi = r^2(\pi + 4).$$

Primjer 3. Kolika je površina elipse s osima duljine $2a$ i $2b$?

Elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ opišimo kružnicu $x^2 + y^2 = a^2$. Povucimo pravac $x = x_1$ paralelan s osi y. Taj pravac siječe kružnicu i elipsu te su odgovarajući segmenti $2y_1 = 2\sqrt{a^2 - x_1^2}$ (u kružnici) te $2y_2 = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$ (u elipsi).



Slika 3.

Omjer $\frac{2y_1}{2y_2} = \frac{a}{b}$ očigledno je neovisan o tome gdje je presjek proveden, uvijek će omjer dviju tetiva, one unutar kružnice i one unutar elipse biti jednak i iznosit će $a : b$. Time su ispunjeni uvjeti *prvog Cavalierijeva načela* pa su u istom omjeru i površine dijelova ravnine omeđenih kružnicom i elipsom. Površina kruga jednaka je $P_k = a^2\pi$ pa iz razmjera $P_k : P_e = a : b$ nalazimo $P_e = ab\pi$.

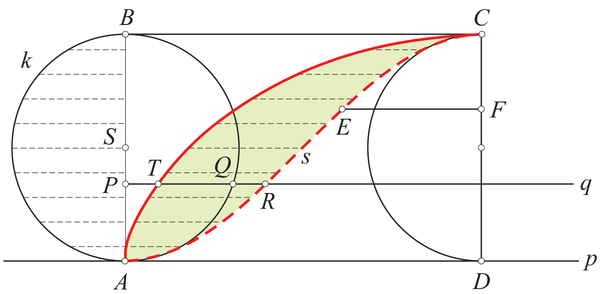
Tako smo jednostavno došli do rezultata.

Površina dijela ravnine koji je omeđen elipsom čije su osi duljina $2a$ i $2b$ jednaka je $P_e = ab\pi$.

Opisanim se postupkom mogu izračunati površine mnogih likova u ravnini ali, dakako, postoje i jednostavniji i suvremeniji načini da se dođe do istih rezultata. No ipak ćemo prikazati kako je francuski matematičar Gilles Persone Roberval (1602. – 1675.) izračunao površinu ispod luka cikloide, krivulje koju opiše neka točka na kružnici pri kotrljanju kružnice po pravcu.

Primjer 4. Kružnica k s promjerom duljine $d = 2r$ kotrlja se po pravcu p. Točka A u početnom položaju je točka dodira kružnice i pravca i neka ona pri kotrljanju opiše luk AC cikloide. Pritom se promjer $\overline{AB}$ nađe u položaju $\overline{CD}$, a to znači da je $|AD| = r\pi$.

Kolika je površina dijela ravnine omeđenog ovim lukom, pravcem p i dužinom $\overline{DC}$?



Slika 4.

Odaberimo na luku cikloide točku T pa na paraleli tom točkom s pravcem p točku R tako da je $|TR| = |PQ|$. Opisani postupak provedemo za svaku točku istog luka i tako dobijemo krivulju s koju Roberval zove *suputnicom cikloide*. Može se pokazati da je zapravo riječ o sinusoidi. Ona pravokutnik $ADCB$ dijeli na dva sukladna dijela što se može obrazložiti sukladnošću dužina $\overline{PR}$ i $\overline{EF}$. A kako svakoj dužini tipa $\overline{PR}$ odgovara sukladna dužina $\overline{EF}$, ispunjeni su uvjeti *prvog Cavalierijeva načela* pa sinusoida pravokutnik $ADCB$ dijeli na dva dijela jednakih površina. Površina pravokutnika jednaka je $2r^2\pi$ što je dvostruko veće od površine kruga omeđenog danom kružnicom. Kako je po konstrukciji površina iscrtanog dijela jednaka površini polovine istog kruga, onda je površina ispod luka cikloide jednaka:

$$P = r^2\pi + \frac{1}{2}r^2\pi = \frac{3}{2}r^2\pi\,.$$

No onda je površina ispod "cijelog" luka cikloide dvostruko veća i iznosi $3r^2\pi$.

Drugo Cavalierijevo načelo

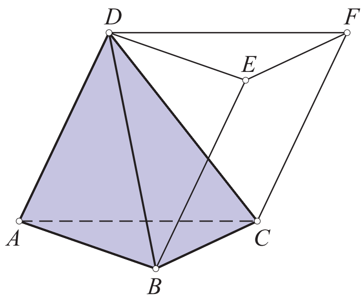
Drugo načelo poopćenje je prvog i može se iskazati na sljedeći način:

Ako dva tijela u prostoru siječemo skupom paralelnih ravnina te ako su površine presjeka u svakom pojedinom slučaju u istom omjeru, onda su u tom omjeru i volumeni tih dvaju tijela.

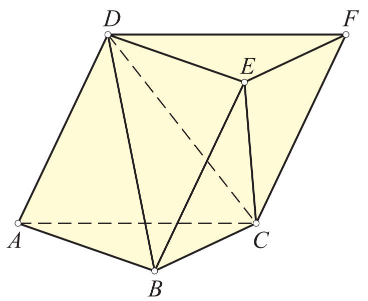
Ovo načelo često se primjenjuje u srednjoškolskoj nastavi geometrije, svakako češće nego prvo, jer su druge metode za određivanje formula za izračun volumena tijela na tom stupnju neprimjerene. Tako primjerice, pozivajući se na ovo načelo, možemo zaključiti da svake dvije prizme kojima su osnovke jednakih površina i koje imaju jednake visine imaju jednak volumen. Jednako tako možemo obrazložiti zbog čega svake dvije piramide sa sukladnim bazama i jednakom visinom imaju isti volumen. I to je upravo ona činjenica koju ćemo iskoristiti za izvod osnovne formule za volumen piramide.

Primjer 5. Odredimo formulu za volumen trostrane piramide.

Pretpostavimo da je dana trostrana piramida $ABCD$ i da joj treba odrediti obujam. Kako to izvesti? Svaku trostranu piramidu možemo jednostavno dopuniti do trostrane prizme pri čemu piramida



Slika 5.



Slika 6.

i prizma imaju sukladne osnovke i jednake visine. Jedan je od načina da vrhom postavimo trokut $\Delta\, DEF$ sukladan trokutu $\Delta\, ABC$ tako da stranice tih dvaju trokuta budu paralelne. Spojnice $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ bočni su bridovi prizme.

Uočimo sada kako je prizma $ABCDEF$ unija triju piramida. Redom su to piramide $ABCD$ (naša zadana), $BCDE$ i $CDEF$.

Pokažimo da sve one imaju jednak volumen.

Piramide $ABCD$ i $BCDE$ imaju sukladne osnovke, trokute $\Delta\, ABD$ i $\Delta\, BED$ u istoj ravnini, a točka C im je zajednički vrh pa dakle imaju i jednake visine. One dakle imaju i jednake volumene.

Piramidama $BCDE$ i $CDEF$ sukladni trokuti $\Delta\, BCE$ i $\Delta\, CFE$ su osnovke, a točka D im je zajednički vrh pa su i njima jednaki volumeni.

Konačno, da su volumeni piramida $ABCD$ i $CDEF$ proistječe izravno zbog svojstva tranzitivnosti jednakosti, a može se obrazložiti na način analogan prethodnom.

Zaključimo: Volumen piramide jednak je trećini volumena prizme sa sukladnom osnovkom i jednakom visinom. Odnosno, volumen piramide kojoj je B površina baze, a duljina visine v jednak je:

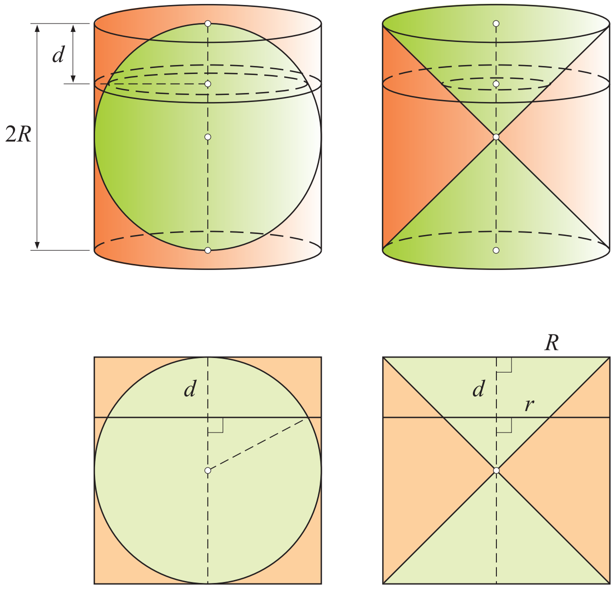
$$V = \frac{1}{3} Bv\,.$$

Izvodi formula za volumen valjka i stošca provode se slično upravo opisanim postupcima za izvođenje formula za volumen prizme i piramide.

A i izvod formule za volumen kugle, kao i za volumene dijelova kugle, na vrlo lijep način oslanjaju se na *drugo Cavalierijevo načelo*.

Primjer 6. Odredimo formulu za volumen kugle polumjera R.

Smjestimo kuglu u jednakostraničan valjak, valjak čiji je osni presjek kvadrat. Za usporedbu poslužit će nam tijelo koje dobijemo kad iz sukladnog jednakostraničnog valjka uklonimo dva stošca kojima su osnovke ujedno osnovke valjka, a zajednički vrh u polovištu spojnice središta dviju osnovki.



Slika 7.

Neka osnovke obaju tijela leže u istoj ravnini pa provedimo presjek paralelnom ravninom na udaljenosti d od gornje osnovke.

Polumjer presjeka kugle jednak je $\sqrt{R^2 - (R-d)^2} = \sqrt{2Rd - d^2}$, a njegova je površina jednaka $(2Rd - d^2)\pi$. No onda je površina kružnog vijenca na slici lijevo jednaka:

$$P_1 = R^2\pi - (2Rd - d^2)\,\pi = (R-d)^2\pi.$$

Na slici desno, polumjer r presjeka iste ravnine i stošca jednak je $r = R - d$ pa površina tog presjeka iznosi $P_2 = (R-d)^2\pi$.

Dakle, $P_1 = P_2$ i taj je rezultat neovisan o d. Prema *drugom Cavalierijevu načelu* razlika volumena valjka i kugle jednaka je zbroju volumena dvaju stožaca:

$$V_v - V_k = 2V_s \,.$$

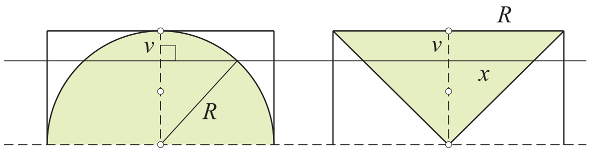
Dakle, $2R^3\pi - V_k = \frac{2}{3}R^3\pi$. Tako konačno nalazimo da je volumen kugle polumjera R jednak:

$$V_k = \frac{4}{3}R^3\pi \,.$$

Postupcima koji su slični ovom mogu se odrediti i volumeni dijelova kugle. Tako možemo, primjerice, koristeći se istom prethodno opisanom konstrukcijom izračunati volumen kalote, kuglina odsječka. Pa neka je to:

Primjer 7. Izračunajmo volumen kuglina odsječka.

Označimo s v visinu kalote, a s ρ polumjer njezine osnovke. Prema prethodnom primjeru proizlazi da je razlika volumena valjka visine v i kalote jednak volumenu krnjeg stošca s polumjerima osnovki R i $x = R - v$. Imamo dakle:



Slika 8.

$$R^2\pi v - V_o = \frac{\pi v}{3}(3R^2 - 3Rv + v^2), \text{ odakle je:}$$

$$V_o = \frac{v^2\pi}{3}(3R - v) \,.$$

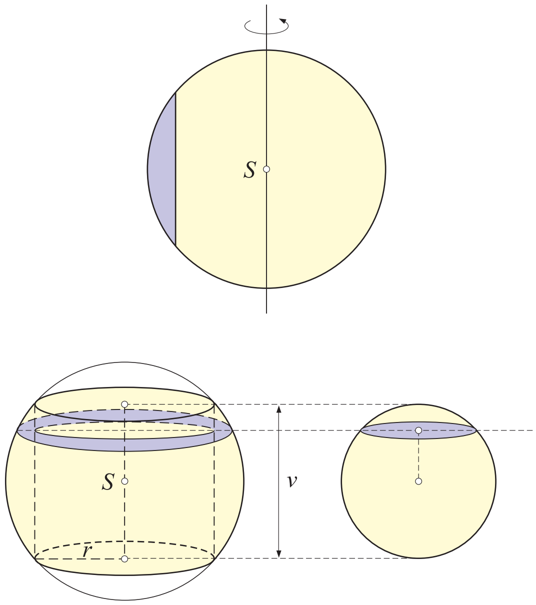
Iz ove se formule može izvesti još jedna i ona glasi:

$$V_o = \frac{v\pi}{6}(3\rho^2 + v^2) \,.$$

Primjer 8. Prikažimo još i kako primjenom *Cavalierijeva načela* određujemo volumen kuglina prstena, rotacijskog tijela koje nastaje rotacijom kružnog odsječka oko osi koja prolazi središtem kružnice paralelno tetivi.

Neka je dakle dan krug polumjera R čijom se rotacijom dobije kuglin prsten visine v. Upišimo kugli valjak polumjera r i visine v.

Usporedimo površinu presjeka ovako konstruiranog tijela s površinom presjeka istom ravninom kugle polumjera $v/2$ koja leži u ravnini osnovke kuglina prstena.



Slika 9.

Izračunajmo najprije površinu kružnog prstena, presjeka tijela na slici 9. gore ravninom na udaljenosti d od središta S kugle:

$$P_1 = (R^2 - d^2)\,\pi - r^2\pi = (R^2 - d^2 - r^2)\pi \,.$$

Površina presjeka manje kugle istom ravninom jednaka je:

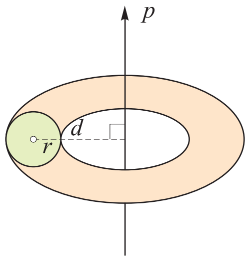
$$P_2 = \left(\left(\frac{v}{2}\right)^2 - d^2\right)\pi = (R^2 - r^2 - d^2)\pi \,.$$

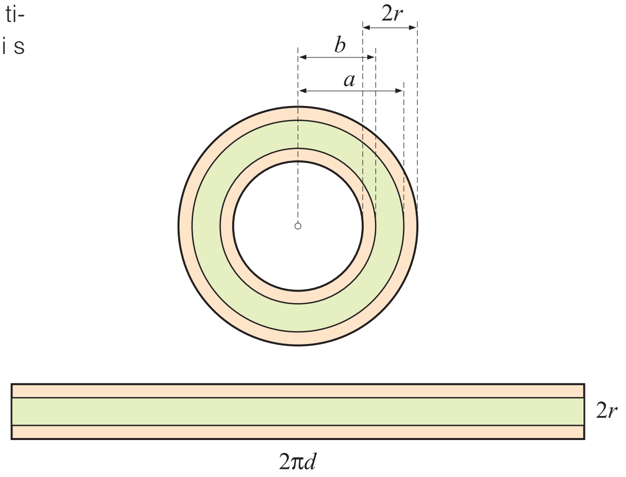
Očigledno je $P_1 = P_2$ i taj je rezultat neovisan o d pa zaključujemo kako kuglin prsten i pridružena mu manja kugla promjera v imaju jednake volumene. A budući da sada znademo formulu za računanje volumena kugle, lako nalazimo da je volumen kuglina prstena jednak:

$$V_p = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^3 \pi = \frac{1}{6}v^3\pi \,.$$

Vrlo je zanimljivo primijetiti da volumen kuglina prstena uopće ne ovisi o veličini kugle, odnosno o njezinu polumjeru pa svi kuglini prsteni iste visine imaju jednake volumene. Ili drugim riječima, obujam kuglina prstena ovisi o duljini tetive kružnog odsječka koji opisanom rotacijom proizvodi taj prsten. Što je tetiva dalje od osi rotacije (polumjer pripadnog kruga je veći), prsten je "tanji", ali se volumen ne mijenja.

Primjer 9. Odrediti volumen torusa, rotacijskog tijela koje nastane pri vrtnji kruga oko pravca koji s krugom nema zajedničkih točaka.





Slika 10.

Neka je dan krug sa središtem u točki S i polumjerom r i neka se taj krug vrti oko pravca koji je od središta kruga udaljen d, $d > r$. Dobit ćemo tako torus koji neka leži na ravnini M. Na istu ravninu položimo valjak s polumjerom baze r i izvodnicom duljine $s = 2\pi d$, i to tako da taj valjak leži na nekoj svojoj izvodnici.

Presijecimo oba tijela ravninom koja je paralelna ravnini M. Presjek torusa bit će kružni prsten vanjskog polumjera a i unutarnjeg b pa mu je površina jednaka $P_1 = (a^2 - b^2)\pi$.

Presjek valjka istom ravninom jest pravokutnik sa stranicama duljina $a - b$ i $2\pi d$ i njegova je površina jednaka $P_2 = 2\pi d(a - b)$.

No $d = \frac{a+b}{2}$, te je $P_2 = (a - b)(a + b)\pi = (a^2 - b^2)\pi = P_1$.

Ispunjeni su dakle uvjeti *drugog Cavalierijeva načela* pa je volumen torusa jednak volumenu valjka i iznosi:

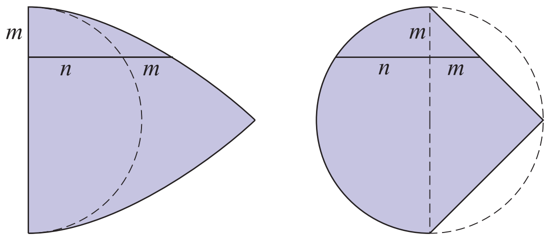
$$V = 2r^2\pi^2 d\,.$$

* * *

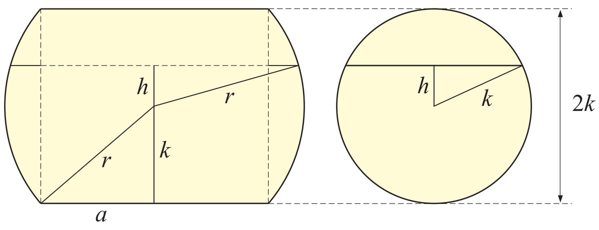
I na kraju, evo još i jednog zadatka:

Zadatak. U knjizi *Great Moments in Mathematics* Howarda Evesa nailazimo na dva sljedeća zadatka zadana bez komentara.

Prepuštamo čitateljima da odgonetnu o čemu je riječ.



Slika 11.



Slika 12.