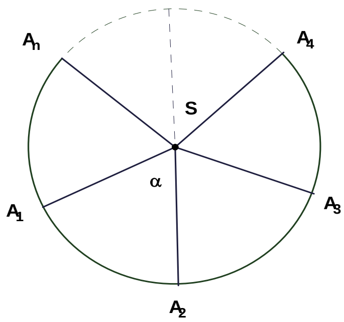
ZVJEZDASTI MNOGOKUTI

MLADEN HALAPA, *Bjelovar*

Znate li koji je simbol države Izrael? To je Davidova zvijezda koja se sastoji od šest krakova. I u prošlosti Divljeg zapada šerif je nosio metalnu značku u obliku zvijezde. Možete li vi navesti neki predmet ili simbol sličnog oblika? Upoznajmo pobliže te zanimljive likove!

Neka je u ravnini zadana kružnica sa središtem u točki S i polumjerom r. Puni kut s vrhom u središtu S kružnice razdijelimo na n jednakih *središnjih kutova*:

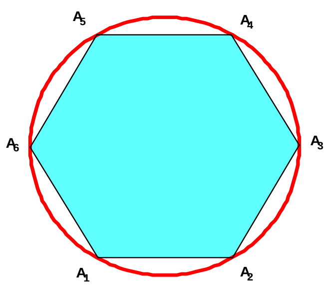


$$\alpha = \frac{360°}{n}.$$

Presjek krakova tako dobivenih kutova i kružnice označimo točkama A_1, A_2, A_3, …, A_n.

Spojimo li redom točke A_1, A_2, A_3, A_4 …, A_n, A_1, dobit ćemo pravilan mnogokut[1]. Sve su njegove stranice i svi unutarnji kutovi međusobno sukladni. Kažemo da je to *konveksan mnogokut* jer je spojnica bilo kojih dviju točaka tog mnogokuta sadržana u njemu. Za primjer navodimo pravilni šesterokut $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$.

Spojimo li svaku drugu (ili treću, četvrtu, petu…) točku na kružnici, dobit ćemo vrhove zanimljivih likova koje zovemo *zvjezdastim pravilnim mnogokutima* ili *nekonveksnim*[2] *pravilnim mnogokutima.*

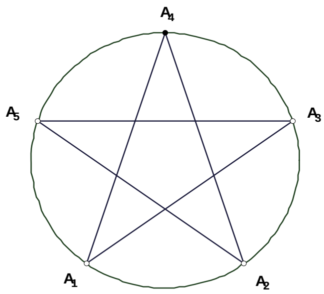


[1] poligon, n-terokut

[2] u nekonveksnom mnogokutu postoji par točaka A i B čija spojnica $\overline{AB}$ nije dio mnogokuta

Primjer 1. Konstruirajmo zvjezdasti pravilni peterokut (nekonveksni pravilni peterokut).

Nacrtajmo kružnicu i podijelimo je na pet jednakih dijelova točkama A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5.



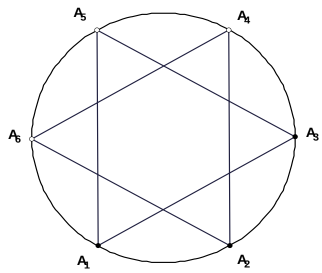
Središnji kut je

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°.$$

Spojimo li svaku drugu točku, nastaje traženi lik. Njegove stranice čine *zatvorenu izlomljenu liniju* $A_1A_3A_5A_2A_4A_1$. Ima li smisla spajati svaku treću točku na kružnici? Što dobijemo?

Primjer 2. Nacrtajmo nekonveksni pravilni šesterokut.

Ponovno konstruirajmo kružnicu i podijelimo je na šest jednakih dijelova točkama A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 i A_6.



Središnji kut je

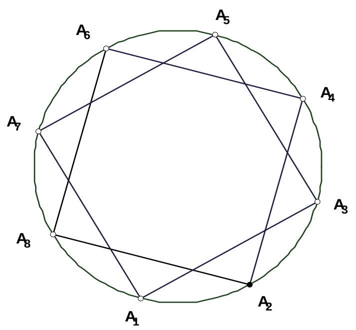
$$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$$

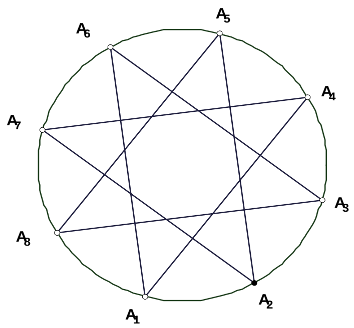
Spojimo li svaku drugu točku, sa slike je vidljivo da ćemo dobiti dvije izlomljene zatvorene linije: $A_1A_3A_5A_1$ i $A_2A_4A_6A_2$. Je li potrebno spajati svaku treću ili četvrtu točku?

Prinjer 3. Sami se uvjerite da pravilnih nekonveksnih osmerokuta ima čak dvije vrste:

- s dvije zatvorene izlomljene linije: $A_1A_3A_5A_7A_1$ i $A_2A_4A_6A_8A_2$,
- s jednom zatvorenom izlomljenom linijom: $A_1A_4A_7A_2A_5$ $A_8A_3A_6A_1$.

Pozorno proučite donju sliku!





Zadatak 1. Kružnicu podijelite na devet jednakih dijelova i ispitajte koliko se može nacrtati pravilnih nekonveksnih deveterokuta.

Zadatak 2. Prikazana je tablica u kojoj je dan broj pravilnih nekonveksnih mnogokuta ako je zadan broj njihovih vrhova. Uvjerite se u to crtanjem!

Broj vrhova	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Broj mnogokuta	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8

Tvrdnja. Ako kružnicu podijelimo na n jednakih lukova, tada je broj svih nekonveksnih pravilnih mnogokuta koji se mogu u nju upisati jednak je najvećem cijelom broju manjem od $\left(\frac{n}{2}-1\right)$.

Dokaz. Podijelimo kružnicu na n jednakih lukova, a djelišne točke označimo redom A_1, A_2, A_3, …, A_n.

Stranice mnogokuta mogu biti dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, …, $\overline{A_1A_k}$, gdje je indeks k prirodni broj manji od $\frac{n}{2}$. Za k veće od $\frac{n}{2}$ dobijemo već nacrtane mnogokute, dakle, ne dobijemo nove. Budući da je jedan mnogokut konveksan pravilni mnogokut, broj nekonveksnih pravilnih mnogokuta za jedan je manji od broja k.

Zaključak: Broj zvjezdastih pravilnih mnogokuta je najveći cijeli broj manji od $\left(\frac{n}{2}-1\right)$.