POVRŠINA TANGENCIJALNO-TETIVNOG ČETVEROKUTA

MLADEN HALAPA, BJELOVAR

U mnoštvu mnogokuta zanimljiva je formula za površinu četverokuta kojemu se istodobno može upisati i opisati kružnica:

$$P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}\,, \qquad (1)$$

gdje su a, b, c, d duljine stranica.

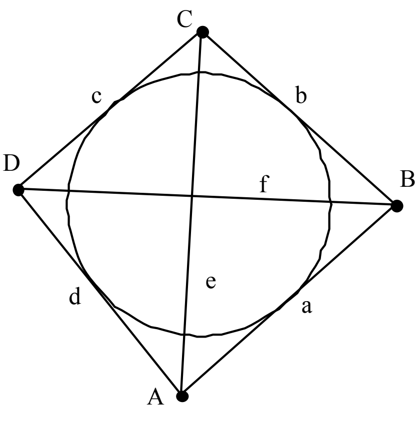
Dokažimo formulu!

Podsjetimo se definicija tangencijalnog i tetivnog četverokuta:

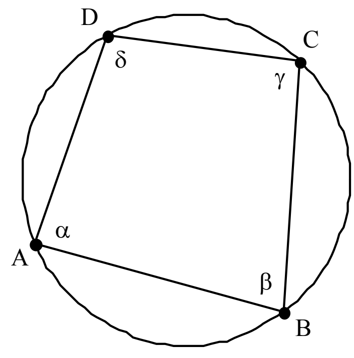
- Četverokut u koji se može upisati kružnica (*kojemu su stranice tangente kružnice*), zove se tangencijalni četverokut (Slika 1.) i vrijedi:

$$a + c = b + d\,. \qquad (2)$$

- Četverokut oko kojega se može opisati kružnica (*kojemu su stranice tetive kružnice*), zove se tetivni četverokut (Slika 2.) i vrijedi:



Slika 1.



Slika 2.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \qquad (3)$$

Da bismo izveli formulu (1), dokazat ćemo prije toga tri stavka.

STAVAK 1 (Ptolemejev[1] poučak)

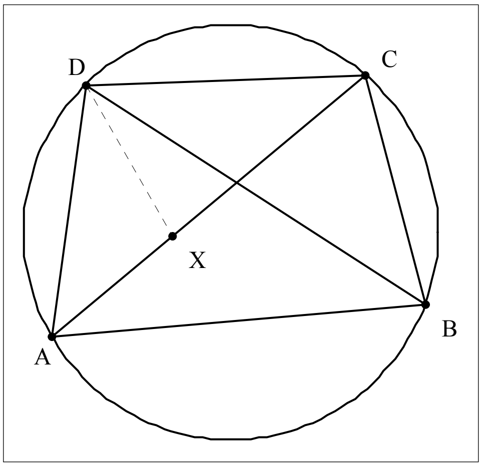
Za svaki tetivni četverokut ABCD je:

[1] Ptolemej, Klaudije (oko 100. − oko 178.), starogrčki matematičar

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d \,, \tag{4}$$

gdje je:

$$|AB| = a \,,\ |BC| = b \,,\ |CD| = c \,,\ |DA| = d \,,\ |AC| = e \,,\ |BD| = f \,. \tag{5}$$



►

Na dijagonali AC konstruiramo točku X tako da je:

$$\angle ADX = \angle BDC \,.$$

Budući da su kutovi $\angle DAC$ i $\angle DBC$ obodni kutovi nad lukom $\overset{\frown}{CD}$, slijedi:

$$\angle DAC = \angle DBC \,.$$

Trokuti ΔAXD i ΔBCD slični su jer imaju jednake kutove. Valjan je razmjer:

$$|AD| : |AX| = |BD| : |BC| \,,$$

odnosno:

$$|AD| \cdot |BC| = |AX| \cdot |BD| \,. \tag{6}$$

Istu argumentaciju ponovimo za trokute ΔABD i ΔCDX. Obodni kutovi $\angle ACD$ i $\angle ABD$ jednaki su jer su nad istim lukom $\overset{\frown}{DA}$. Budući da je

$$\angle ADB = \angle CDX \,,$$

trokuti ΔABD i ΔCDX slični su. Zato je:

$$|AB| : |BD| = |CX| : |CD| \,,$$

tj.

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CX| \,. \tag{7}$$

Zbrojimo (6) i (7), a nakon sređivanja dobijemo traženu jednakost:

$$|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AX| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CX| = |BD| \cdot (|AX| + |CX|) = |BD| \cdot |AC|$$

ili zbog (5):

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d . \quad ■$$

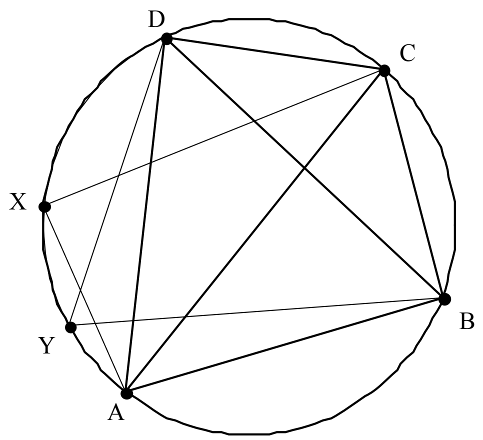
STAVAK 2

Za svaki je tetivni četverokut ABCD točna jednakost:

$$|AC| : |BD| = (|AB| \cdot |AD| + |CB| \cdot |CD|) : (|BA| \cdot |BC| + |DA| \cdot |DC|) .$$

Koristeći oznake (5), možemo pisati:

$$e : f = (ad + bc) : (ab + cd) . \tag{8}$$



Slika 3.

►

Konstruiramo tetivni četverokut ABCD i na kružnici odredimo točke X i Y tako da vrijedi:

$$\overset{\frown}{XA} = \overset{\frown}{CD} , \quad \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{AB} .$$

Uočimo dva nova tetivna četverokuta AXCB i BYDC. Na svaki od njih primijenimo Ptolemejev poučak:

$$|AC| \cdot |BX| = |AB| \cdot |CX| + |AX| \cdot |BC| , \tag{9}$$

$$|BD| \cdot |CY| = |CD| \cdot |BY| + |BC| \cdot |DY| . \tag{10}$$

Zaključujemo da zbog jednakosti duljine lukova (Slika 3.) slijede jednakosti među duljinama tetiva:

$$\overset{\frown}{AX} = \overset{\frown}{DC} \;\Rightarrow\; |AX| = |DC| , \quad \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{AB} \;\Rightarrow\; |DY| = |AB| ,$$

$$\overset{\frown}{CY} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{XA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{XB} \;\Rightarrow\; |BX| = |CY| ,$$

$$\overset{\frown}{CX} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DX} = \overset{\frown}{DX} + \overset{\frown}{XA} = \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DY} + \overset{\frown}{YA} = \overset{\frown}{YA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{YB} \;\Rightarrow\; |CX| = |BY| = |AD| .$$

Relaciju (9) podijelimo s (10) i, koristeći gornje jednakosti, dobijemo traženu tvrdnju za tetive:

$$e : f = (ad + bc) : (ab + cd) . \quad ■$$

Sada se duljina svake dijagonale tetivnog četverokuta lako može izračunati s pomoću duljina stranica. Iz (8) se, na primjer, dobiva duljina dijagonale e:

$$e = f \cdot \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d} \ ,$$

a s pomoću Ptolemejeva poučka (4) konačno:

$$e^2 = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}{a \cdot b + c \cdot d} \ . \qquad (11)$$

STAVAK 3 (Heronova[2] formula za površinu tetivnog četverokuta)

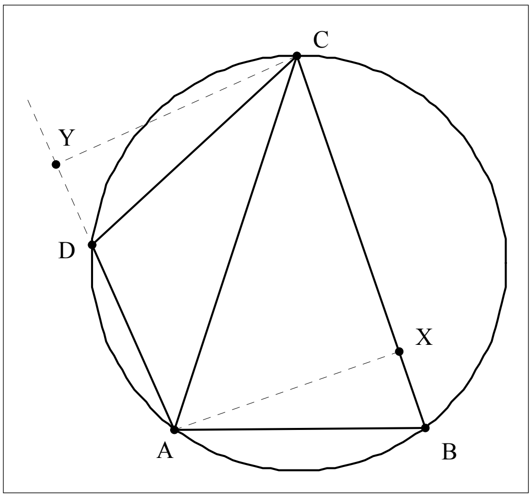
Površina tetivnog četverokuta glasi:

$$P = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)} \ , \qquad (12)$$

gdje su a, b, c, d duljine stranica, a s poluopseg:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \ . \qquad (13)$$

Zanimljivo je da je ta formula slična formuli za površinu trokuta. U literaturi ćemo naći podatak kako je bila poznata već staroindijskim matematičarima.



►

Tetivni četverokut ABCD rastavimo dijagonalom AC na dva trokuta: ΔABC i ΔACD. Konstruiramo njihove visine AX i CY. Površina pravokutnika ABCD može se izraziti kao zbroj površina trokuta ΔABC i ΔACD:

$$P = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} \ .$$

Trokuti ΔABX i ΔCYD slični su jer imaju jednake kutove. Uvjerimo se:

$$\angle YCD + \angle CDY = \angle XBA + \angle BAX \ , \ \ \angle YCD + \angle CDY = 180^\circ - \angle ADC + \angle BAX \ ,$$

$$<YCD + <CDY + <ADC = 180^\circ + <BAX ,$$

a zbog (3) slijedi:

$$<YCD = <BAX .$$

Vrijedi razmjer:

$$|AX| : |CY| = |AB| : |CD| . \tag{14}$$

Površina tetivnog četverokuta jest:

$$P = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AX| + \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CY| = (\text{ zbog}(14)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AX| + \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD| \cdot |AX| \cdot |CD|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB| \cdot |BC| + |AD| \cdot |CD|}{|AB|} \cdot |AX| . \tag{15}$$

Iz pravokutnog trokuta ABX izračunamo duljinu visine |AX|:

$$|AX|^2 = |AB|^2 - |BX|^2 . \tag{16}$$

U trokutu ABC vrijedi:

$$|AC|^2 - |CX|^2 = |AB|^2 - |BX|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |AC|^2 - |AB|^2 = |CX|^2 - |BX|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |BX| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{|BC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - e^2}{b} .$$

Za dijagonalu |AC| = e uvrstimo izraz (11) i sve supstituiramo u (16) te nakon sređivanja i zamjene (5) dobijemo:

$$|AX| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{ab + cd} \cdot \sqrt{(a + b + c - d) \cdot (a + b - c + d) \cdot (a - b + c + d) \cdot (-a + b + c + d)} .$$

Izraz za duljinu visine |AX| na kraju stavimo u (15) pa formula za površinu glasi:

$$P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a + b + c - d) \cdot (a + b - c + d) \cdot (a - b + c + d) \cdot (-a + b + c + d)} .$$

Zbog (13) konačno se dobije:

$$P = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d)} . \quad \blacksquare$$

Sada možemo pokazati kako izvodimo formulu (1). Primjenom svojstva (2) tangencijalnog četverokuta slijedi:

$$s = \frac{a + b + c + d}{2} = a + c = b + d$$

pa relacija (12) prelazi u (1):

$$P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} .$$

Na primjer, za kvadrat vrijedi:

$$a = b = c = d \quad \Rightarrow P = \sqrt{a^4} = a^2 .$$

[2] Heron, starogrčki matematičar, živio u Aleksandriji vjerojatno u 1. stoljeću poslije Krista