Razmišljanja o sredini

Stjepan Poljak[1]*,*
Tomislav Rudec[2]*, Osijek*

U ovom radu objasnit ćemo pobliže pojam sredine u matematici. Izvest ćemo najčešće korištene vrste sredina (poput aritmetičke, geometrijske i harmonijske) i na svakodnevnim primjerima objasniti problem odabira sredine pomoću principa nedovoljnog razloga.

Uvod

Vjerojatno si se, dragi čitaoče, tijekom svojeg školovanja često zapitao: "Je li moja ocjena bila pravedna?" Možda imaš osjećaj kako znaš više, a dobio si manju ocjenu. Nekad je i obratno; znaš manje, a uspiješ dobiti veću ocjenu. Naravno, ovo bismo mogli objasniti time kako smo ponekad bili podložni samoslužećoj pristranosti (eng. *self-serving bias*), odnosno kako u ovoj situaciji, primjerice slabiju ocjenu pripišemo pogreški ili karakteru nastavnika, a bolju ocjenu svojoj sposobnosti ili trudu. Upravo zato prisiljeni smo reći kako je ocjenjivanje (i na pismenom i na usmenom ispitu) u svakom slučaju subjektivno.

Uloga nastavnika nije marginalna; on daje ocjenu na osnovu svoje subjektivne procjene, na što često može utjecati njegova osobnost, predrasude, njegovi kriteriji i slično. Stoga nije začuđujuće kako ocjene mogu biti nepravedne, nekad namjerno, nekad nenamjerno; nekad na korist, a nekad na štetu učenika. Za potrebe ovog rada, pretpostavit ćemo kako su ocjene ipak savršen pokazatelj učenikova znanja. No, i uz ovaj aksiom, još uvijek nam je nametnut problem izvođenja zaključne, odnosno završne ocjene: kako odabrati ocjenu (broj) koja će biti savršeno mjerilo učenikova znanja i sposobnosti samo na osnovu brojki koje su zapisane u imenik? Čini se kako nam je potrebna neka vrsta *alata* kojim će nastavnik zaključiti najpravedniju ocjenu.

Radi lakše predodžbe problema, zamislimo naizgled trivijalnu situaciju koja će nam poslužiti kao motiv za prvi dio rada. Ivica je u školi na satu likovne kulture imao izuzetnu inspiraciju te je naslikao izvrsnu sliku zimskog, snježnog pejzaža. Ta slika se, zahvaljujući Ivičinom urođenom umjetničkom daru (i maminoj subjektivnosti), iznimno svidjela njegovim roditeljima. Roditelji žele da svi njihovi gosti budu iznenađeni talentom njihovog sina pri samom ulasku u kuću: odlučili su sliku objesiti u hodnik.

Odabir lokacije je prvi problem. Tata je matematičar te izvodi razne izračune za savršenu poziciju slike uz savjete statističara, psihologa i estetičara. Statističar predlaže lokaciju gdje većina ljudi stavlja slike (ovo ipak oduzima kreativnost i draž cijelom postupku), psiholog predlaže prazan zid, a este-

[1] Magistar je edukacije matematike i informatike, `stjepan.poljak@gmail.com`
[2] Doc. dr. sc., predavač je na Elektrotehničkom fakultetu u Osijeku, `tomo@ffos.hr`

tičar poziciju kojom će se dobiti najljepša kompozicija. Nepotrebno je reći kako bi i svaki od tatinih kolega matematičara imao drukčiji prijedlog (Leonardo da Vinci gotovo bi sigurno odabrao zlatnu sredinu između vješalice i ormarića za cipele).

Nakon što su odabrali mjesto, roditelji trebaju zabiti čavao u zid. Koji čavao odabrati? Čini se da je svejedno pa odabiru jedan koristeći *znanstvenu* metodu tipa eci-peci-pec. Sada im nedostaje čekić. Zaboravili su kako su čekić posudili susjedima i moraju se snaći nečim drugim. Traže po kući bilo što čime bi se mogli poslužiti. Imaju omanju palicu, debelu knjigu s tvrdim uvezom i nekoliko alata njima nepoznate svrhe. Što odabrati? Palica je lakša za koristiti, ali možda bi s posebnim izdanjem knjige *Les Miserables* Victora Hugoa (koju je iznimno teško pronaći u našim knjižarama) bolje obavili posao? Na kraju, nemajući živaca za ambivalenciju i razne nedoumice svog supruga, majka donosi ono što je njoj najbliže i s čime je *na ti*: čekić s kojim tuče mesne odreske.

Upravo je takva situacija i sa zaključivanjem ocjena. Mi imamo mnogo *alata* kojima možemo zaključiti ocjenu, ali koji od njih odabrati? U našim je školama čest *alat* za računanje prosjeka aritmetička sredina, ali ipak postoje i mnoge druge sredine. Preciznije, njih beskonačno mnogo. Kao i s prethodnom pričom, ljudi su bili neodlučni oko toga koji alat odabrati pa su odabrali onaj koji im je bio najjednostavniji i onaj koji su najčešće koristili. O ovakvom problemu nam govori tzv. princip nedovoljnog razloga (engl. *principle of insufficient reason*, *principle of indifference*). Laički rečeno, ako nemamo razloga odabrati neki poseban alat, možemo odabrati koji god želimo. Mi ne znamo koji je bolji ili lošiji, svi nam se čine jednako dobri, ali mogu imati različite posljedice. Ovaj princip poznavali su još i Jacob Bernoulli i Pierre Simon Laplace, no svoj je naziv dobio tek kasnije kao kontrast Leibnizovu[3] principu dovoljnog razloga (engl. *principle of sufficient reason*) koji govori kako svaka činjenica ima dovoljan razlog zašto je upravo takva (više o tome: pogledati [1]).

Etimologija riječi i definicija sredine

Često i olako koristimo širok raspon riječi koje pridodaju određenu jakost našim izjavama, argumentima i tvrdnjama. Rijetko čovjek zastane i zapita se o samom značenju riječi koje koristi. Ponavljamo riječ u sebi ili naglas i shvaćamo kako je, kada našoj riječi oduzimamo slovo po slovo, ono što je ispod svih tih grafema i fonema bilo skriveno, uglavnom i nejasno[4]. Upravo se to događa i s riječi *sredina*. Ova riječ ima dva aspekta. Možemo podrazumijevati sredinu u tradicionalnom smislu (staroslavenski *sreda*), kao središte. Upravo u ovakvu vrstu sredine spada i dan srijeda, dan koji je jednako udaljen od početka i od kraja tjedna (ako, prirodno, za prvi dan uzmemo nedjelju, a za zadnji subotu). Naravno, možemo uzeti u obzir i središte kružnice, sfere i slično. No, kada je u pitanju primjerice skup brojeva na brojevnom pravcu, a imamo više od dva podatka, prisiljeni smo proširiti značenje riječi *sredina* i dati joj značenje slično značenju izraza *ono što je između*. Na neki se način pomoću samo jednog podatka pokušava se opisati cijeli skup podataka. Razlike između ovakvih riječi, kao što su *sredina*, *ono što je između*, *prosjek* i slično, su veoma osjetljive, suptilne i gotovo neprimjetne kao i razlike između riječi *bitno* i *važno*, *inteligencija* i *intelekt*, *ljubav* i *zaljubljenost*.

Osim u *širokom smislu* riječi možemo promatrati sredinu u *užem smislu* riječi. Tradicionalno se pod tim podrazumijevaju aritmetička sredina, ono što obično shvaćamo pod riječi *prosjek*, medijan, mod i slično. Laički rečeno, aritmetička sredina skupa od n podataka je suma tih podataka podijeljena s njihovim brojem, odnosno s n. Ostali načini izlaze izvan okvira ovog rada, ali ćemo, ukratko, reći kako je medijan onaj podatak koji dijeli skup tako da prva polovica podataka bude "ispod" medijana (gdje je svaki podatak iz te "donje polovice" manji od medijana), a druga polovica "iznad", isto tako da svaki podatak iz "gornje polovice" bude veći od medijana. Stoga bi mogli reći kako je medijan

[3] Princip dovoljnog razloga bio je poznat i u doba starih Grka; Platon i Aristotel su ga implicitno podrazumijevali, ali tek mu je Leibniz dao sadašnji naziv.

[4] Opširnija pojašnjenja ovakvih lingvističkih tvrdnji o značenjima (i nedostatku značenja) riječi mogu se pronaći u radovima austrijskog filozofa L. Wittgensteina: vidjeti [3].

zapravo podatak *u sredini* ako promatramo njegov redni broj. Mod je podatak koji se najčešće pojavljuje u tom skupu; ukoliko se svi podatci pojavljuju jednakom frekvencijom, tada mod nije definiran.

Definirat ćemo prvo sredinu u širokom smislu riječi.

Definicija 1. Za skup realnih brojeva $\{a_1, \ldots, a_n\}$, gdje je $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, sredina je svaki realan broj $x \in [a_1, a_n]$.

No, dalje u radu promatrat ćemo samo sredinu u nešto užem smislu riječi, i to onakvu kakva je dana sljedećom definicijom.

Definicija 2. Neka je dan skup pozitivnih realnih brojeva $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sredina reda r (Hölderova sredina ili engl. *power mean*) skupa S, koju ćemo označavati s $HS(r)$, definirana je formulom

$$HS(r) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Primjer 1. Aritmetička sredina $AS = HS(1)$ skupa realnih brojeva $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ definirana je formulom

$$AS = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Primjer 2. Geometrijska sredina u svom općenitom obliku može se dobiti iz Hölderove sredine kada r teži k nuli (ne možemo direktno uvrstiti nulu zbog $\frac{1}{r}$ koji tada nije definiran). Iako aritmetičku sredinu možemo promatrati i za negativne brojeve, geometrijska se sredina definira samo za pozitivne brojeve.

Za geometrijsku sredinu koristit ćemo oznaku GS. Neka je zadan skup pozitivnih realnih brojeva $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Geometrijska sredina

$$GS = \lim_{r \to 0} HS(r)$$

skupa S tada je definirana formulom

$$GS = \lim_{r \to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Primjer 3. Neka je zadan skup pozitivnih realnih brojeva $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Harmonijska sredina $HS = HS(-1)$ skupa S je tada definirana formulom

$$HS = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Primjer 4. Neka je zadan skup pozitivnih realnih brojeva $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Kvadratna sredina $KS = HS(2)$ skupa S definirana je formulom

$$KS = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Primjer 5. Funkciju maksimuma dobivamo iz Hölderove sredine uzimanjem limesa kada $r \to \infty$:

$$\lim_{r \to \infty} HS(r) = \max(S).$$

Primjer 6. Funkciju minimuma dobivamo na sličan način, uzimanjem limesa kada $r \to -\infty$:

$$\lim_{r \to -\infty} HS(r) = \min(S).$$

Teorem 1. *Dan je skup pozitivnih realnih brojeva $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Za svaki $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $r_1 < r_2$ vrijedi $\min(S) \leq HS(r_1) \leq HS(r_2) \leq \max(S)$.*

Kako smo u prethodnom teoremu izbacili geometrijsku sredinu iz priče, odnosno slučaj $r = 0$, želimo još pogledati u kakvom su odnosu ostale sredine s geometrijskom sredinom. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2. *Za svaki pozitivan r vrijedi $HS(-r) \leq GS \leq HS(r)$.*

Iz ovog teorema lako se vidi da za svaki skup pozitivnih brojeva S vrijedi

$$\min(S) \leq HS \leq GS \leq AS \leq KS \leq \max(S).$$

Primjene i izvodi

Kada smo već u priču uveli Ivicu, nekako je red pridodati i Maricu. U jednoj dalekoj osnovnoj školi, Marica, koja je poput Ivice nadarena više za umjetnost, ima ocjene 2, 3 i 5 iz matematike. Pomozimo njenom nastavniku zaključiti ocjenu. Zasad nam se čini kako dileme nema jer nastavnik će najčešće uzeti upravo aritmetičku sredinu: zbrojimo ocjene i podijelimo ih s brojem ocjena. Stoga bi zaključna ocjena bila upravo $\frac{2+3+5}{3}$, a to je otprilike 3.33. Nastavnik će joj zaključiti trojku.

Zašto joj ne bi zaključio peticu? Očito je pokazala na zadnjem testu da može naučiti za pet. Možda bismo mogli reći kako se ipak trebala bolje potruditi, kako nije bila odgovorna i zaključiti joj dvojku, njenu najmanju ocjenu. Dakle, od svih ovih raznih sredina, osim aritmetičke, ovdje smo mogli koristiti i funkciju minimuma (njena najmanja ocjena) i maksimuma (njena najveća ocjena). Uočimo, ako bi nastavnik koristio neku sredinu, sigurno joj ne bi smio zaključiti jedinicu, upravo zato što se svaka sredina mora nalaziti između njene najmanje i njene najveće ocjene (između 2 i 5).

Nastavnik je Marici zaključio odličan i roditelji su joj dopustili odabrati neki bicikl koji će joj kupiti kao nagradu za odličnu ocjenu. Marici se svidio jedan ružičasti bicikl čija je početna cijena bila 700 kuna. No, dok je trajala školska godina, cijena bicikla je rasla: prvi mjesec na 800, drugi na 950, a treći na 980 kuna. Roditelji pokušavaju pronaći neki smisao u porastu cijene bicikla. Pogledajmo razne načine na koje ove brojeve možemo tumačiti.

Aritmetička sredina

Problem 1. Možemo, za početak, pretpostaviti da je cijena rasla tako da je trgovac početnoj cijeni dodao 100 kuna; cijeni u drugom mjeseca 150, a cijeni u trećem mjesecu 30 kuna. Dakle konačnu cijenu možemo dobiti kao $700+100+150+30=980$ kuna. Ako se zapitamo, koliki je bio prosječan porast cijene bicikla mjesečno, koristimo aritmetičku sredinu, upravo zato što smo uzeli za pretpostavku kako je cijena rasla s obzirom na najjednostavnije zbrajanje. Ono što je ovdje skriveno jest činjenica da koristeći aritmetičku sredinu mi zapravo zamjenjujemo brojeve 100, 150 i 30 samo jednim brojem; drugim riječima želimo dobiti broj n tako da vrijedi $700+n+n+n=980$. Dobili bismo $3n=280$, tj. $n\approx 93.33$, a to je upravo aritmetička sredina od 100, 150 i 30. Dakle, možemo zaključiti kako je prosječan porast cijene mjesečno bio otprilike 93.33 kuna.

Geometrijska sredina

Problem 2. Ipak, problem s cijenom bicikla možemo promatrati i s druge strane. Možda trgovac nije dolazio do novih cijena zbrajanjem, već povećanjem svake prethodne za neki postotak (mjesečno). Postotak za koji se cijena povećala u prvom mjesecu (sa 700 na 800 kuna), možemo izračunati koristeći formulu $p_1=\frac{K}{P}-1$, gdje je K nova, a P stara cijena. Stoga je postotak $p_1=\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}$, a to je otprilike 0.1429, tj. 14.29%. Postotak porasta cijene s $P_1=800$ na $K_2=950$ je $p_2=\frac{19}{16}-1=\frac{3}{16}=0.1875$, tj. 18.75%. Na kraju, $p_3=\frac{98}{95}-1=\frac{3}{95}$, otprilike 3.16%. Posljednju cijenu (980 kuna) možemo iz početne (700 kuna) dobiti formulom $700c_1c_2c_3=980$. Ono što nas sada zanima jeste prosječni prirast cijene! To znači svaki od ovih brojeva c_1, c_2 i c_3 želimo zamijeniti jednim brojem c (koji, kada uzmemo $c-1$, predstavlja prosječan prirast cijene za neki postotak). To možemo dobiti iz formule $c_1c_2c_3=c^3$. Kada izvadimo treći korijen, dobivamo $c=\sqrt[3]{c_1c_2c_3}$, a to je upravo geometrijska sredina brojeva c_1, c_2 i c_3. Uočimo kako je $c=\sqrt[3]{\frac{14896}{10640}}=\sqrt[3]{\frac{7}{5}}$, tj. $c\approx 1.1187$ pa je prosječni postotak, odnosno prirast cijene $p\approx 11.87\%$. Lako se može provjeriti kako je sada $700\cdot c\cdot c\cdot c=700c^3=700\cdot\frac{7}{5}=980$.

Primjer 7. Promatrajmo posudu u obliku kvadra obujma $V_1=216\,\mathrm{cm}^3$ sa stranicama $a=18\,\mathrm{cm}$, $b=4\,\mathrm{cm}$, $c=3\,\mathrm{cm}$. Želimo napraviti novu posudu u obliku kocke koja će sadržavati jednako mnogo vode kao i stara. Treba odrediti duljinu stranice d kocke. Kako je obujam kvadra definiran formulom $V_1=abc$, a obujam kocke $V_2=d^3$, lako je uočiti kako stranicu d kocke možemo dobiti geometrijskom sredinom stranica a, b i c kvadra: $d = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{216} = 6\,\text{cm}$. Slično se rješava i analogan problem pravokutnika i kvadrata jednakih površina.

Harmonijska sredina

U svakodnevnom životu vrlo je često u upotrebi harmonijska sredina. Sam naziv dobila je po tome što su se pomoću nje određivale duljine žica na sviralima starogrčkih umjetnika (Pitagorino otkriće; za detaljniji povijesni kontekst aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine vidjeti [2]). Žice tako dobivenih duljina mogle su proizvoditi tonove koji su međusobno bili u skladu (harmoniji). Harmonijsku sredinu je svatko tko se barem malo bavio matematikom koristio barem jedanput u životu, a da to možda nije ni znao. To je zato jer se ona koristi i za računanje prosječne brzine ako vrijeme nije poznato. Primjerice automobil putuje pola puta brzinom 40 km/h, a drugu polovinu puta brzinom 60 km/h. Kolika mu je prosječna brzina? (Ili kod zadataka s cijevima i bazenima, radnicima i poslovima i slično). Aritmetička sredina ovdje je u uskoj vezi s harmonijskom sredinom, jer također se može koristiti za računanje prosječne brzine, ali kada je vrijeme poznato. Jedini uvjet (*conditio sine qua non*) je da prilikom računanja prosječne brzine ukupno vrijeme kod aritmetičke sredine bude podijeljeno na vremenske intervale jednakih trajanja, a kod harmonijske sredine prijeđeni *put* (može biti i bilo što drugo što se mijenja po jedinici vremena) mora biti podijeljen na jednake dijelove.

Daleko je lakše vidjeti upotrebu harmonijske sredine u računanju brzine ako u zadatku već imamo ukupan put podijeljen na jednake dijelove. Stoga, uzmimo ovakav slučaj u naše razmatranje. Nakon što je Marica kupila bicikl, odlučila se provozati po biciklističkoj stazi u njenom malom gradu. Prvi kilometar je vozila brzinom od 4 km/h, a drugi kilometar se već umorila i vozila sporije, 3 km/h. Pitamo se kolikom je prosječnom brzinom vozila? Vidimo kako je prvi kilometar prošla za četvrtinu sata, a drugi kilometar za trećinu sata. Dakle ukupno je vozila $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ sati. U to vrijeme je prošla dva kilometra, dakle prosječno je vozila $\frac{2}{\frac{7}{12}} = \frac{24}{7}$, što je otprilike 3.43 km/h. Ovo smo mogli odmah dobiti pomoću harmonijske sredine (cijeli put je podijeljen na dva jednaka dijela), uvrštavajući recipročne vrijednosti ovih brzina u formulu: $\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}$. Da smo koristili aritmetičku i geometrijsku sredinu ne bismo dobili dobru prosječnu brzinu, što je trivijalno za uočiti.

Funkcija minimuma i maksimuma

Na ovim se sredinama nećemo previše zadržavati, upravo zato što su najjasnije i zato što ih možemo koristiti u gotovo svakom kontekstu. Funkcija minimuma dakle, vraća najmanji element nekog skupa (to je npr. pouzdanost nečega), a funkcija maksimuma (mogućnost) najveći. Stoga, vezano uz naš problem cijene bicikla, mogli smo se pitati koja je bila najveća cijena, najveći porast, najveći prirast, najveća brzina, a isto tako i najmanja cijena, najmanji porast, najmanji prirast, najmanja brzina i tako dalje.

Izvodi i dokazi

Ovdje ćemo ukratko ilustrirati nekoliko dokaza i izvoda prethodno navedenih tvrdnji u radu.

Funkcija minimuma i maksimuma. Funkciju maksimuma dobivamo iz Hölderove sredine uzimanjem limesa kada $r \to \infty$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ takav da vrijedi $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, odnosno $\max(S) = x_n$. Uzimamo gotov izraz iz izvoda za geometrijsku sredinu (nakon logaritmiranja i primjene L'Hospitalova pravila). Dobivamo

$$\ln \lim_{r\to\infty} HS(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^r \ln x_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r}.$$

No, kako ovdje r ide u beskonačnost, najbolje što možemo napraviti je podijeliti brojnik i nazivnik s najvećim elementom, odnosno s x_n^r. Primijetimo da vrijedi $x_i < x_n$, odnosno, $\frac{x_1}{x_n} < 1$, za svaki $i = 1, \ldots, n-1$, tada $\left(\frac{x_i}{x_n}\right)^r \to 0$ kada $r \to \infty$, za $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Jedino što će od gornje i donje sume ostati je $\left(\frac{x_n}{x_n}\right)^r = 1$ (primijetimo da ipak u gornjoj ostaje još i $\ln x_n$). Stoga u gornjem izrazu preostaje

$$\ln \lim_{r\to\infty} HS(r) = \frac{\frac{1}{n}\ln x_n}{\frac{1}{n}} = \ln x_n.$$

Na kraju dobivamo $\lim_{r\to\infty} HS(r) = \max(S)$. Funkcija minimuma se dobiva ako uzmemo limes kada $r \to -\infty$. Izvod se provodi analogno prethodnom slučaju ukoliko uzmemo supstituciju $t = -r$ (tada $t \to \infty$). Uistinu vrijedi $\lim_{r\to-\infty} HS(r) = \min(S)$.

Dokaz teorema 1. Neka je zadan skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ pozitivnih realnih brojeva. Prethodno smo pokazali da $HS(r) \to \max(S)$ kada $r \to \infty$ te $HS(r) \to \min(S)$ kada $r \to -\infty$. Ukoliko pokažemo da je funkcija $HS(r)$ strogo rastuća (s obzirom na promjenu varijable r), vrijedit će $\min(S) \leq HS(r_1) \leq HS(r_2) \leq \max(S)$, za svaki $r_1 < r_2$. No, kako ova funkcija ima prekid u $r = 0$, morat ćemo promatrati ograničenje $HS : \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R}$ (naravno ovdje smo fiksirali skup S, inače bismo mogli promatrati i funkciju obzirom na promjenu elemenata skupa i slično). Prvo se želimo riješiti eksponenta $\frac{1}{r}$ logaritmiranjem

$$\ln HS(r) = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right).$$

Uzmimo $HS(r) = y$. Deriviranjem ovog izraza dobivamo

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dr} = -\frac{1}{r^2}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{r-1}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r}.$$

Primijetimo kako u prvom članu s desne strane jednakosti faktor $-\frac{1}{r^2}$ možemo staviti kao potenciju u logaritam, te pomnožiti sve s y. U drugom članu se r pokrati, a isto tako i $\frac{1}{n}$. Tada vrijedi

$$\frac{dy}{dr} = y\left(\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{-\frac{1}{r^2}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{r-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}\right).$$

Kako su svi x_i pozitivni, i $y = HS(r)$ će biti pozitivan, a i oba preostala člana. Stoga je i lijeva strana jednakosti, odnosno prva derivacija od $HS(r)$, pozitivna. Iz toga slijedi da je sredina r-tog reda rastuća obzirom na varijablu r.

Dokaz teorema 2. Promotrimo prvo nejednakost $GS \leq HS(r)$, odnosno

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Obje su strane pozitivne pa možemo primijeniti logaritamsku funkciju. Nejednakost se ne mijenja jer je logaritamska funkcija rastuća. Zatim, pomnožimo li sve s r, nejednakost opet ostaje ista jer pretpostavljamo da je r pozitivan. Dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln x_i^r \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^r\right). \tag{1}$$

Prisjetimo se Jensenove nejednakosti:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}(p_i f(x_i)),$$

gdje je f konveksna i vrijedi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ i $p_i \geq 0$. Logaritamska funkcija je konkavna pa za nju vrijedi obratna nejednakost. Uz to, zadovoljen je i uvjet da su koeficijenti $\frac{1}{n}$ uz x_i pozitivni i da je njihova suma $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$. Dakle, nejednakost (1) je istinita. Dokaz se provodi analogno i za $-r$.

Geometrijska sredina. Pokažimo kako je uistinu

$$GS = \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.$$

Primijetimo, kako je logaritamska funkcija neprekidna i definirana za pozitivne brojeve, te kako isto to vrijedi i za funkciju pod limesom u gornjem izrazu, možemo uzeti

$$\ln GS = \lim_{r\to 0}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)}{r}.$$

Kada r ide u nulu dobivamo neodređeni izraz $\frac{0}{0}$ pa možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo (derivirati brojnik i nazivnik po r) i dobiti

$$\ln GS = \lim_{r\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^r \ln x_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n} x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dobili smo $\ln GS = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$, pa primjenom eksponencijalne funkcije dobivamo $GS = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

Zaključak

Postoji još mnogo različitih sredina koje se mogu koristiti u raznim situacijama. Ipak u svima nam je bila poznata neka pravilnost. U prvom slučaju znali smo kako cijena bicikla raste dodavanjem nekog broja pa smo koristili aritmetičku sredinu. U drugom slučaju tražili smo prosječni prirast cijene pri čemu smo koristili množenje pa smo znali kako moramo koristiti geometrijsku sredinu. U trećem slučaju znali smo kako se radi o prosječnoj brzini pa smo koristili harmonijsku sredinu. Dakle, u konkretnom slučaju već imamo naučen, urođen osjećaj koju sredinu uzeti. Ako konkretnog slučaja iz prošlosti nema, ne znamo što bismo. Primjerice, nastavi niz: $1, 2, \ldots$. Ako gledamo u kontekstu zbrajanja (aritmetički niz) mogli bismo nastaviti niz kao $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$; u kontekstu množenja mogli bismo nastaviti niz kao $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ i slično.

No, kod ocjene takvog pravila nema. Ocjenu daje nastavnik na temelju svoje procjene i on može dati ocjenu koju god hoće, bez nekog pravila. Stoga, koju od ovih sredina možemo koristiti? Bilo koju. No, nakon malo promišljanja o prethodno rečenom, možemo slobodno reći: budući da je svaka pojedinačna ocjena donesena subjektivnom procjenom, i zaključna bi ocjena trebala biti donesena kao rezultat subjektivne refleksije. Učitelj je taj koji prati učenika kroz godinu, i ako već ima pravo donositi svaku ocjenu na subjektivnoj razini, trebao bi imati pravo i donijeti završnu ocjenu na subjektivnoj razini. Tako održavamo neku vrstu konzistentnosti gdje ona nedostaje sama po sebi. Zašto se onda najčešće koristi aritmetička sredina? Odgovor leži u tradiciji i povijesti; aritmetička sredina je, od svih navedenih, najlakša i najintuitivnija za izračunati (danas na raspolaganju imamo džepna računala, ali u prošlosti je bio znatno veći napor izračunati ne samo korijene, kvadrate nego i recipročne vrijednosti; kod aritmetičke sredine imamo samo operacije zbrajanja i dijeljenja prirodnim brojem).

Ipak, pokazali smo kako možemo odabrati bilo koju sredinu po principu nedovoljnog razloga. Ako bismo krenuli razmišljati na višem nivou, mogli bismo se zapitati, temeljem principa nedovoljnog razloga, među svim ostalim principima koji postoje, imamo li razloga preferirati upravo princip nedovoljnog razloga? To je, kao i princip dovoljnog razloga, aksiom. Mi po njemu moramo postupati, ali samo ukoliko ga odaberemo za aksiom. Možemo isto tako, po samom principu nedovoljnog razloga odabrati bilo koji drugi princip, što je donekle i paradoksalno. Ako bih učeniku koji ima sve odlične ocjene zaključio jedinicu, po principu dovoljnog razloga mogli bismo reći kako smo imali dovoljan razlog da mu zaključimo jedinicu. Taj razlog može biti sakriven, vanjština ne odaje uvijek unutrašnjost, npr. neki osobni hir, ludost, bolest... Budućnost će pokazati (*prepoznat ćete ih po njihovim rezultatima*) je li ovo ocjenjivanje bilo primjereno ili ne.

LITERATURA

1/ A. Schopenhauer, J. Frauenstadt, *On the Fourfold Root of the Principle of Sufficient Reason*, Cosimo, New York, 2007. ISBN 978-1-60206-358-7

2/ Uta C. Merzbach, Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011. ISBN 978-0-470-52548-7

3/ L. Wittgenstein, *Filozofijska istraživanja*, Globus, Zagreb, 1998.