Dvije primjene simetrične jednadžbe četvrtog stupnja

Petar Svirčević, Zagreb

Rješavanje *simetrične jednadžbe červrtog stupnja* obrađuje se u drugom razredu srednje škole, a sada ćemo to elementarno gradivo primijeniti na dva zadatka, da se vidi kako ovaj oblik jednadžbe ima konkretnu primjenu, osobito u drugom zadatku.

Zadatak 1. Naći uvjete uz koje postoji trokut zadan stranicama a i b i duljinom visine na treću stranicu jednakoj geometrijskoj sredini duljina visina na zadane stranice, dakle $h_c = \sqrt{h_a h_b}$.

Rješenje. Iz $2P = ah_a = bh_b \Rightarrow$

$$a : b = h_b : h_a, \tag{1}$$

a odatle je

$$h_a = kb,\ h_b = ka,\ h_c = k\sqrt{ab}, \tag{2}$$

jer je $h_c = \sqrt{h_a h_b}$, gdje je k konstanta proporcionalnosti. Ako u *Heronovu formulu* u obliku $P = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}$ uvrstimo vrijednosti

$$a = \frac{2P}{h_a},\quad b = \frac{2P}{h_b},\quad c = \frac{2P}{h_c},$$

dobivamo vezu

$$P = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{h_a^4}+\frac{1}{h_b^4}+\frac{1}{h_c^4}\right)}}. \tag{3}$$

Zbog (2) je $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}abk$, a ako to i relacije (2) uvrstimo u (3) slijedi

$$\frac{abk}{2} = \frac{k^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}\right)}},$$

pa je konstanta proporcionalnosti

$$k = \frac{ab}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}\right)},$$

dakle je

$$P = \frac{a^2b^2}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}\right)}. \tag{4}$$

Prema tome (4) je formula za površinu trokuta, ako je zadano a i b te je $h_c = \sqrt{h_a h_b}$. Iz (4) je jasno, da mora biti

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}\right)^2 > 2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}\right),$$

a odatle je $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{2}{a^3b}+\frac{2}{ab^3}>\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}$. Ako obje strane te nejednakosti pomnožimo s a^4, dobit ćemo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4-2\left(\frac{a}{b}\right)^3-\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}\right)+1<0. \tag{5}$$

Promotrimo sada simetričnu funkciju četvrtog stupnja

$$f(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1. \tag{6}$$

Faktorizacijom dobivamo

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2-3x+1). \tag{7}$$

Zanima nas, kada je $f(x)<0$.

Iz (7) slijedi, da je $f(x)<0$, ako je

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \tag{8}$$

jer su $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ rješenja jednadžbe $x^2-3x+1=0$, dok je $x^2+x+1>0$ za svaki $x\in R$, (rješenja jednadžbe $x^2+x+1>0$ su konjugirano kompleksna).

Ako ove rezultate, tj. (8), prenesemo na nejednadžbu (5), tada slijede nejednakosti

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{a}{b}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \tag{9}$$

i to su traženi uvjeti. Budući su korijeni x_1 i x_2 jedan drugome recipročni, uvjet (9) možemo pisati u obliku

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}b<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}b, \tag{10}$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}a<b<\frac{3+\sqrt{5}}{2}a. \tag{11}$$

Konačno iz (10) i (11) zaključujemo, da za svaki $a\in\langle 0,\infty\rangle$ mora biti $b\in\left\langle\frac{3-\sqrt{5}}{2}a,\frac{3+\sqrt{5}}{2}a\right\rangle$ ili za svaki $b\in\langle 0,\infty\rangle$, $a\in\left\langle\frac{3-\sqrt{5}}{2}b,\frac{3+\sqrt{5}}{2}b\right\rangle$.

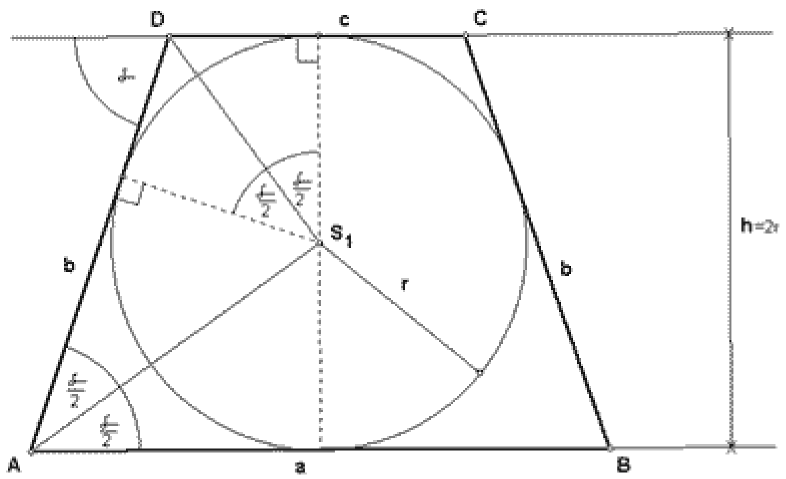
Zadatak 2. Jednakokračnom trapezu može se upisati i opisati kružnica. Omjer duljine visine trapeza i duljine polumjera opisane mu kružnice jednak je $\sqrt{2/3}$. Odredite njegove kutove.

(Rezultat: Mjere kutova su $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3}{4}\pi$, i obratno.)

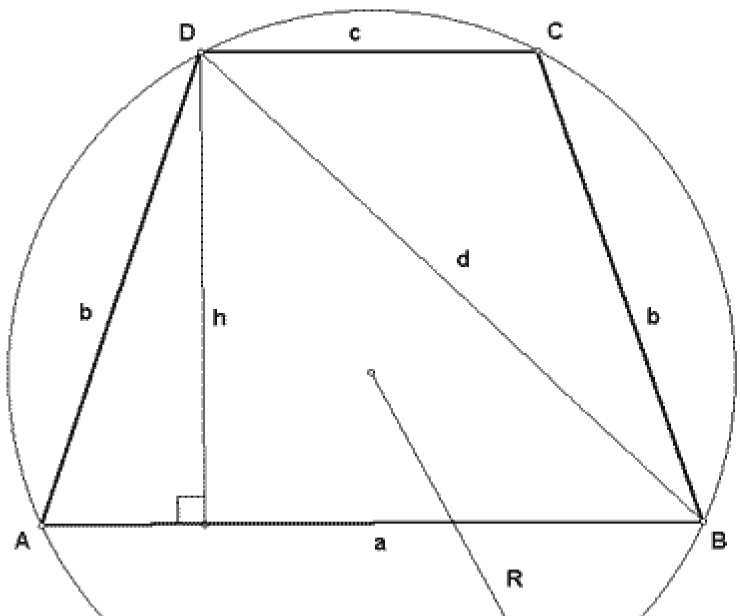
Napomena 1. Ovaj zadatak je uzet iz knjige B. Pavković-D.-Veljan: *Matematika* (zbirka), Školska knjiga, Zagreb (strana 111, zad.13.). Njega rješavamo na malo teži način, jer *ne koristimo izravno uvjete tetivnosti* (nasuprotni kutovi su suplementni, tj. suma njihovih mjera je 180^o) *i tangencijalnosti* (sume duljina nasuprotnih stranica su jednake) *za četverokut*, što bi imalo za posljedicu, da je površina toga četverokuta jednaka drugom korijenu iz produkta duljina stranica. Na osnovu iznesenog zaključujemo, da je $P=\sqrt{abcd}$ nužan i dovoljan uvjet za tetivnost i tangencijalnost četverokuta, pa ćemo sada riješiti naš zadatak i bez ove ekvivalencije. Vjerujemo, da postoje rješenja, koja su kraća i elegantnija od ovoga, no ovo se rješenje navodi, jer se tu pojavljuje *simetrična jednadžba četvrtog stupnja*.

Rješenje. Neka su oznake kao na sl.1., dakle treba naći mjere kutova α i $\pi-\alpha$ (to su mjere kutova trapeza). Iz uvjeta zadatka slijedi da je $b=\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$, dakle

$$b=\frac{a+c}{2}. \tag{12}$$



Slika 1.



Slika 2.

Iz sl. 2. i (12) zaključujemo

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2} \quad \text{ili}$$

$$h=\sqrt{ac}. \tag{13}$$

No, ako je R duljina polumjera trapezu opisane kružnice, to je onda (iz uvjeta zadatka) i duljina polumjera kružnice opisane trokutu ABD, pa je

$$R=\frac{abd}{4P_{ABD}}. \tag{14}$$

Iz sl.2., (12) i (13) slijedi

$$d=\sqrt{h^2+\left(a-\frac{a-c}{2}\right)^2} \quad \text{ili}$$

$$d=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+6ac+c^2}, \tag{15}$$

a površina trokuta

$$P_{ABD}=\frac{1}{2}a\sqrt{ac}. \tag{16}$$

Supstituiramo li (12),(15) i (16) u (14), dobivamo

$$R=\frac{(a+c)\sqrt{a^2+6ac+c^2}}{8\sqrt{ac}},$$

a odatle (zbog (13)) slijedi

$$\frac{R}{h}=\frac{(a+c)\sqrt{a^2+6ac+c^2}}{8ac},$$

ili zbog uvjeta zadatka $\frac{R}{h}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ je

$$\frac{(a+c)\sqrt{a^2+6ac+c^2}}{8ac}=\sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{17}$$

Nakon kvadriranja iz (17) imamo

$$\left(\frac{a}{c}+2+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c}+6+\frac{c}{a}\right)=96. \tag{18}$$

Neka je $x=\frac{c}{a}$, tada (18) poprima oblik

$$\left(\frac{1}{x}+2+x\right)\left(\frac{1}{x}+6+x\right)=96 \tag{19}$$

ili

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)-84=0, \tag{20}$$

a to je simetrična jednadžba četvrtog stupnja.

Iz sl.1. i relacije (19) slijedi $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{h}{2}:\frac{a}{2}=\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{ac}}{a}=\sqrt{\frac{c}{a}}$, dakle

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{c}{a}=x. \tag{21}$$

Ako riješimo jednadžbu (20) po $x+\frac{1}{x}$ dobivamo $\left(x+\frac{1}{x}\right)_{1,2}=-4\pm 10$ ili $x+\frac{1}{x}=6$ i $x+\frac{1}{x}=-14.$ Time smo dobili dvije kvadratne jednadžbe

$$x^2-6x+1=0, \tag{22}$$

$$x^2+14x+1=0. \tag{23}$$

Iz (21) se vidi, da mora biti $x>0$, no oba rješenja jednadžbe (23) su negativna, dakle ne dolaze u obzir. Rješenja jednadžbe (22) su

$$x_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}>0. \tag{24}$$

Iz (21) dobivamo

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=x_{1,2}, \tag{25}$$

a odatle je

$$x_1=3+2\sqrt{2}=\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}}=tg^2\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=tg^2\frac{\alpha_1}{2}\text{, tj.}$$

$$\underline{\alpha_1=\frac{3\pi}{4}.} \tag{26}$$

Slično slijedi,

$$\underline{\alpha_2=\frac{\pi}{4}.} \tag{27}$$

Dakle postoje dvije mogućnosti donjih i gornjih kutova trapeza i to $\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$ i $\pi-\alpha_1=\frac{\pi}{4}$; i obrnuto $\alpha_2=\frac{\pi}{4}$ i $\pi-\alpha_2=\frac{3\pi}{4}$. Time je zadatak u potpunosti riješen.

Napomena 2. Ovaj članak je objavljen u *Zborniku radova* (str. 311-316), (*Prvi kongres nastavnika matematike*), *Hrvatsko matematičko društvo*, Zagreb, 5.-7. srpnja 2000.