

## ROTACIJA (m@h)

Jednoliko gibanje po kružnici je gibanje pri kojem tijelo u jednakim vremenskim intervalima prijeđe jednake lukove kružnice.

**Period T** – ophodno vrijeme, vrijeme potrebno da tijelo jedanput obiđe kružnicu.

**Frekvencija v** – učestalost, broj okretaja u jedinici vremena (u 1 sekundi), recipročna vrijednost perioda.

$$v = \frac{1}{T} \quad , \quad T = \frac{1}{v} \quad , \quad v \cdot T = 1$$

Period T izražava se u sekundama, a frekvencija v u hertzima.

$$[T] = s \quad , \quad [v] = Hz = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

**Obodna (linearna) brzina v** – pri jednolikom kruženju obodna (linearna) brzina stalno mijenja smjer, a po veličini je konstantna i jednaka:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \quad , \quad v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v$$

gdje je r polumjer kružnice, T period, v frekvencija.

**Centripetalna (radijalna) akceleracija  $a_{cp}$**  – ima smjer prema središtu kružnice, a pri jednolikom kružnom gibanju iznosi:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} \quad , \quad a_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \quad , \quad a_{cp} = 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2 \quad , \quad a_{cp} = r \cdot \omega^2$$

$$a_{cp} = \frac{2 \cdot v \cdot \pi}{T} \quad , \quad a_{cp} = 2 \cdot v \cdot \pi \cdot v \quad , \quad a_{cp} = v \cdot \omega$$

gdje je r polumjer kružnice, T period, v frekvencija, v obodna brzina,  $\omega$  kutna brzina.

**Centripetalna sila  $F_{cp}$**  – uzrokuje jednoliko kružno gibanje tijela, a djeluje okomito na smjer brzine gibanja prema središtu kružne putanje.

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp} \quad , \quad F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad , \quad F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \quad , \quad F_{cp} = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot v^2$$

$$F_{cp} = m \cdot \frac{2 \cdot v \cdot \pi}{T} \quad , \quad F_{cp} = m \cdot 2 \cdot v \cdot \pi \cdot v \quad , \quad F_{cp} = m \cdot v \cdot \omega \quad , \quad F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2$$

Pri jednolikoj rotaciji u jednakim vremenskim razmacima tijelo se pomakne za jednake kutove. Kutna brzina  $\omega$  je kvocijent kuta  $\varphi$  i vremena t u kojem je ta promjena nastala. Kut  $\varphi$  izražava se jedinicom radijan. Jedinica za kutnu brzinu je radijan u sekundi.

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

$$[\varphi] = rad \quad , \quad [\omega] = \frac{rad}{s} = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

**Kutna brzina  $\omega$**  – za sve čestice tijela u istom trenutku je jednaka. Obodna (linearna) brzina v pojedinih čestica to je veća što je čestica dalje od središta vrtnje (osi rotacije):

$$v = \omega \cdot r$$

Ako tijelo rotira jednoliko, kutnu brzinu  $\omega$  definiramo izrazima:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad , \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad , \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \quad , \quad \omega = \frac{v}{r} \quad , \quad \omega = \frac{a_{cp}}{v} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{a_{cp}}{r}}$$

**Kutna akceleracija  $\alpha$**  – kvocijent promjene kutne brzine i vremenskog intervala u kojem se promjena dogodila. Ako tijelo rotira jednoliko, kutnu akceleraciju  $\alpha$  definiramo izrazima:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \quad , \quad \alpha = \frac{2 \cdot \pi}{t \cdot T} \quad , \quad \alpha = \frac{\varphi}{t^2} \quad , \quad \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{t} \quad , \quad \alpha = \frac{v}{r \cdot t}$$

Jedinica za kutnu akceleraciju je radijan u sekundi na kvadrat.

$$[\alpha] = \frac{rad}{s^2} = \frac{1}{s^2} = s^{-2}$$

Veza između tangencijalne akceleracije  $a$  točke tijela koja je udaljena za  $r$  od osi rotacije i kutne akceleracije  $\alpha$  tijela je:

$$a = \alpha \cdot r$$

**Ukupna akceleracija** tijela koje se giba po kružnici iznosi:

$$a_u = \sqrt{a^2 + a_{cp}^2}$$

**Moment sile M** – moment M sile F u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile F i udaljenosti  $r$  pravca sile od te osi.

$$M = r \cdot F$$

Jedinica za moment sile jest njutnmetar.

$$[M] = N \cdot m$$

**Moment ustrajnosti, moment tromosti, moment inercije I** – je zbroj umnožaka masa pojedinih čestica tijela i kvadrata njihovih udaljenosti od osi rotacije.

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$$

Jedinica za moment ustrajnosti je kilogram metar na kvadrat.

$$[I] = kg \cdot m^2$$

#### Moment ustrajnosti za neka tijela

Formula	Tijelo
$I = m \cdot r^2$	Materijalna točka mase $m$ na udaljenosti $r$ od osi rotacije.
$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$	Kružna ploča mase $m$ i polumjera $r$ , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem.
$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2$	Štap mase $m$ i duljine $r$ , s obzirom na os koja prolazi okomito njegovom sredinom.
$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$	Kugla mase $m$ i polumjera $r$ , s obzirom na os koja prolazi njezinim središtem.
$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$	Valjak mase $m$ i polumjera $r$ , s obzirom na os koja prolazi središtima baza.
$I = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2$	Šuplja kugla tankih stijenki mase $m$ i polumjera $r$ , s obzirom na os koja prolazi njezinim središtem.
$I = m \cdot r^2$	Šuplji valjak tankih stijenki mase $m$ i polumjera baze $r$ , s obzirom na os koja prolazi središtima baza.
$I = \frac{3}{10} \cdot m \cdot r^2$	Stožac mase $m$ i polumjera baze $r$ , s obzirom na os koja prolazi vrhom stošca i središtem baze.

**Kutna količina gibanja L (moment količine gibanja L)** – umnožak je momenta tromosti  $I$  i kutne brzine  $\omega$ :

$$L = I \cdot \omega$$

Mjerna jedinica kutne količine gibanja je kilogram metar na kvadrat u sekundi.

$$[L] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

#### Zakon očuvanja kutne količine gibanja

Kutna količina gibanja tijela pri rotaciji stalna je sve dok je neka vanjska sila ne promijeni.

$$L_1 = L_2 \quad , \quad I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

**Osnovni zakon rotacije** – krutog tijela ako je  $I$  konstantno glasi:

$$\alpha = \frac{M}{I},$$

gdje je  $\alpha$  kutna akceleracija,  $M$  moment sile (zakretni moment),  $I$  moment ustrajnosti (tromosti).

**Rad W** pri konstantnom momentu sile  $M$  jednak je

$$W = M \cdot \varphi,$$

gdje je  $\varphi$  kut zakreta tijela.

**Snaga  $P$**  – pri rotaciji krutog tijela jednaka je

$$P = \frac{W}{t}, \quad P = M \cdot \frac{\varphi}{t}, \quad P = M \cdot \omega,$$

gdje je  $M$  moment sile,  $\varphi$  kut zakreta tijela,  $\omega$  kutna brzina tijela.

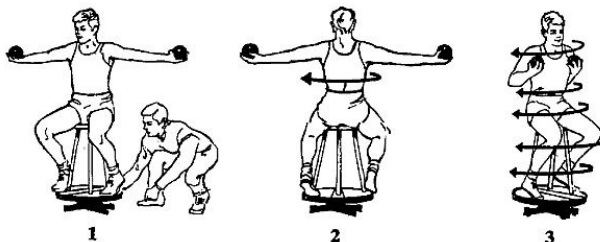
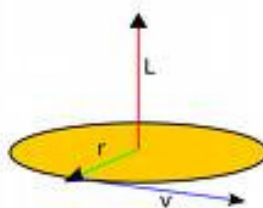
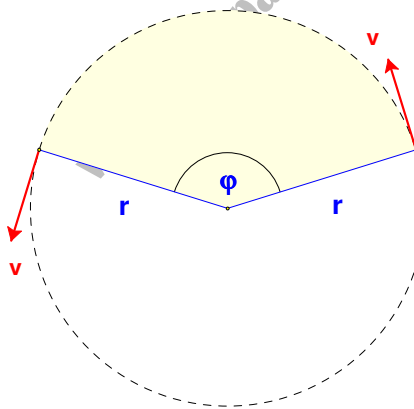
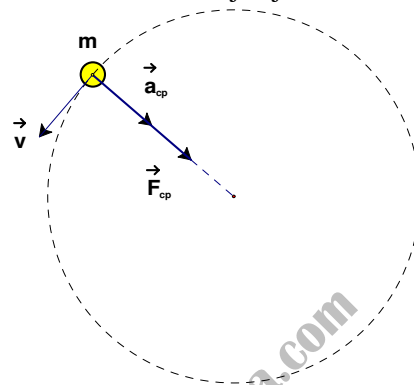
**Kinetička energija  $E_k$**  – krutog tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  oko osi za koju je moment ustrajnosti (tromosti)  $I$ , iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Ako se kruto tijelo kotrlja bez klizanja, kinetička energija je:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $v$  brzina translacije središta mase tijela,  $I$  moment ustrajnosti (tromosti) s obzirom na os koja prolazi kroz središte mase, a  $\omega$  kutna brzina vrtnje tijela oko te osi.



Analogija izraza za translaciju i rotaciju

s – put		$\varphi$ – kut	
v – brzina		$\omega$ – kutna brzina	
a – akceleracija		$\alpha$ – kutna akceleracija	
$v_0$ – početna brzina		$\omega_0$ – početna kutna brzina	
m – masa		I – moment ustrajnosti, tromosti	
F – sila		M – moment sile	
p – količina gibanja		L – kutna količina gibanja	
$s = v \cdot t$		$\varphi = \omega \cdot t$	
$s = s_0 + v \cdot t$		$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$	
$v = a \cdot t$		$\omega = \alpha \cdot t$	
$a = \frac{v}{t}$		$\alpha = \frac{\omega}{t}$	
$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$		$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$	
$a = \frac{2 \cdot s}{t^2}$		$\alpha = \frac{2 \cdot \varphi}{t^2}$	
$v^2 = 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$		$\alpha = \frac{\omega^2}{2 \cdot \varphi}$	
$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$		$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t$	
$v_s = \frac{v_1 + v_2}{2}$		$\omega_s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$	
$v = v_0 + a \cdot t$		$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$	
$a = \frac{v - v_0}{t}$		$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$	
$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$		$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$	
$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$v = v_0 - a \cdot t$		$\omega = \omega_0 - \alpha \cdot t$	
$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$		$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$	
$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot s$		$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$	
$a = \frac{F}{m}$		$\alpha = \frac{M}{I}$	
$F = m \cdot a$		$M = I \cdot \alpha$	
$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	kinetička energija	$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$	kinetička energija
$W = F \cdot s$	rad	$W = M \cdot \varphi$	rad
$P = F \cdot v$	snaga	$P = M \cdot \omega$	snaga
$p = m \cdot v$		$L = I \cdot \omega$	