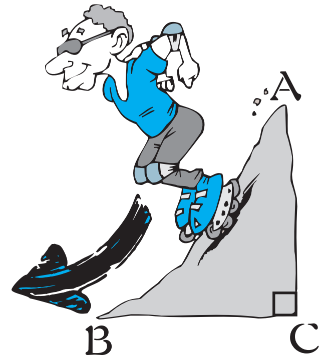
Neki poučci o trokutu



Anđelko Marić, Sinj

U članku ćemo pokušati neke jednostavne činjenice o trokutu izraziti pomoću vektora, ili točnije, neke ćemo poučke o trokutu iskazati u vektorskom obliku. Na kraju ćemo, pomoću tih poučaka, dokazati neke poučke, koji se najčešće drugačije dokazuju.

Da bi se moglo pratiti tekst, nužno je, uz osnovne pojmove o trokutu, poznavati i temeljne pojmove vektorskog računa (pojam suprotnog i nulvektora, zbrajanje i skalarno množenje vektora i slično).

U cijelom ćemo tekstu rabiti stalne oznake: vrhove trokuta označavat ćemo s A, B i C; polovišta stranica trokuta s P, Q i R; težište, ortocentar i središte trokutu opisane kružnice s T, H i S. U nekim slučajevima pojavit će se i još neke oznake, što će biti posebno naznačeno. D.1., D.2., ..., P.1., P.2., ... znače definicije, odnosno poučke, što se neće uvijek posebno naglašavati.

D.1. U trokutu ABC vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ zvat ćemo **vektorima stranica** tog trokuta.

P.1. *Zbroj vektora stranica bilo kojeg trokuta jest nulvektor.*

Dokaz. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Vrijedi i obrat tog poučka, što se iskazuje kao

P.2. *Ako za nekolinearne vektore $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ vrijedi $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$, tada su ti vektori vektori stranica nekog trokuta.*

Dokaz. Rubne točke vektora $\vec{x}$ označimo s A i B, to jest $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$. Vektor $\vec{y}$ dovedimo s početkom u točku B, tada njegov završetak padne u neku točku C, to jest $\vec{y}=\overrightarrow{BC}$. Budući da je $\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, to je $\overrightarrow{AC}+\vec{z}=\vec{0}$, ili $\vec{z}=\overrightarrow{CA}$. A to znači da su $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ vektori stranica trokuta ABC.

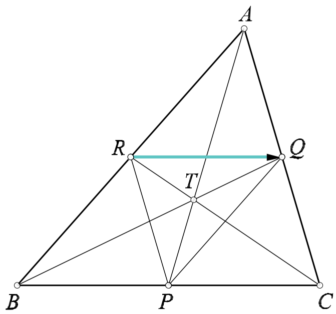
P.3. *Vektor kojemu su rubne točke polovišta stranica trokuta jednak je polovici vektora treće stranice tog trokuta.* (Poučak o srednjici trokuta)

Dokaz. Treba, uz oznake kao na sl. 1., dokazati da je $2\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{CA}$.

Vrijedi

$$2\overrightarrow{RQ} = 2(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AQ}) = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

Isto se tako dokazuje i za ine dvije srednjice.



Slika 1.

D.2. Ako su točke P, Q i R polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC, vektore $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ i $\overrightarrow{CR}$ zvat ćemo **vektorima težišnica** trokuta ABC.

P.4. *Zbroj vektora težišnica trokuta jest nulvektor.*

Dokaz.

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AR}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$
$$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = (\text{P.1}) = \vec{0}.$$

P.5. *Za svaki trokut $\triangle_1$, postoji trokut $\triangle_2$ takav da su vektori stranica trokuta $\triangle_2$ vektori težišnica trokuta $\triangle_1$.*

Dokaz. Tvrdnja poučka slijedi neposredno iz P.4. i P.2.

P.6. *Ako je T težište trokuta ABC, tada vrijedi $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.*

Dokaz. Prema poučku o težištu trokuta vrijedi:

$$\overrightarrow{TA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PA}, \quad \overrightarrow{TB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QB}, \quad \overrightarrow{TC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RC},$$

a odavde je

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}$$
$$= -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR})$$
$$= (\text{prema P.4.}) = \vec{0}.$$

P.7. *Ako je O bilo koja točka ravnine, a T težište trokuta ABC, tada vrijedi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OT}$.*

Dokaz.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC}$$
$$= 3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC})$$
$$= 3\overrightarrow{OT},$$

pri čemu smo korisitli tvrdnju P.6.

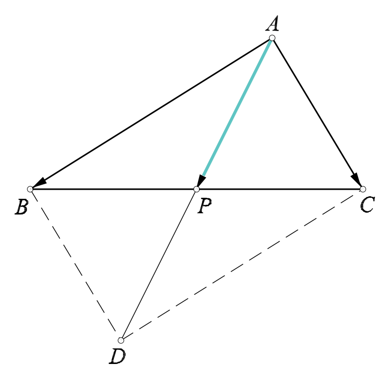
P.8. *Vektor težišnice s početkom u jednom vrhu trokuta jednak je poluzbroju dvaju vektora s početcima u tom vrhu i završetcima u inim dvama vrhovima trokuta.*

Dokaz. Težišnicu $\overline{AP}$ trokuta ABC produžimo preko P do točke D, tako da je $|PD| = |AP|$, kao na sl. 2. Četverokut $ABDC$ je paralelogram, jer mu se dijagonale raspolavljaju.

Zato je $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, a zbog toga

$$2\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

ili $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, što je tvrdnja poučka. Na isti se način to dokaže i za ine dvije težišnice.



Slika 2.

D.3. Trokut kojemu su vrhovi polovišta stranica zadanog trokuta zove se **polovišni trokut** tog trokuta.

P.9. *Težište polovišnog trokuta podudara se s težištem polaznog trokuta.*

Dokaz. Ako su P, Q i R polovišta stranica trokuta ABC, a O bilo koja točka ravnine, dovoljno je, prema P.7., dokazati da vrijedi $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Vrijedi:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP},\\&\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}\implies 2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

jer je

$$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{O}.$$

Isto je tako

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA},\\2\overrightarrow{OR}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

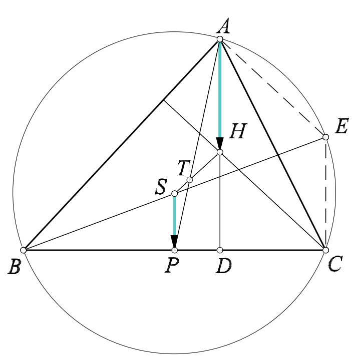
Odavde je

$$2(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

što je ekvivalentno tvrdnji poučka.

P.10. *Ako su u trokutu ABC točke P, Q i R polovišta stranica, H ortocentar, a S središte trokutu opisane kružnice, tada vrijedi:* $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{SR}$.

Dokaz. Neka je E druga rubna točka promjera $\overline{BE}$ kružnice opisane trokutu ABC, kao na sl. 3, tada je $\sphericalangle BCE=\sphericalangle EAB=90^\circ$ (Talesov poučak).



Slika 3.

Kako je $\overline{CH}\perp\overline{AB}$, to je $\overline{CH}\|\overline{EA}$. Iz istoga je razloga $\overline{AH}\|\overline{EC}$, što je dovoljno da je četverokut $AHCE$ paralelogram. Zato je $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{EC}$.

Dužina $\overline{SP}$ je srednjica trokuta BCE, te je, prema P.3., $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{SP}$, to jest $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{SP}$.

Isto se tako dokažu i ine dvije jednakosti poučka. Ovaj se poučak najčešće izriče skalarno, u obliku: udaljenosti ortocentra od jednog vrha trokuta jednaka je dvostukoj udaljenosti središta trokuta opisane kružnice od nasuprotne stranice. Međutim, ovako izrečen poučak je "jači", jer, osim jednakosti udaljenosti, on govori i o usporednosti pripadnih dužina.

P.11. *Težište (T), ortocentar (H) i središte trokutu opisane kružnice (S) su točke istog pravca, pri čemu vrijedi $\overrightarrow{HT}=2\overrightarrow{TS}$.*

Dokaz. Neka se dužina $\overline{SH}$ i težišnica $\overline{AP}$ sijeku u točki T, kao na sl. 3. Dokažimo da je T težište trokuta ABC. Kako je $\overline{SP}\|\overline{AH}$, to je $\sphericalangle SPT=\sphericalangle HAT$, što je, uz $\sphericalangle PTS=\sphericalangle ATH$, dovoljno da su trokuti PTS i ATH slični. Prema P.10. vrijedi $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{SP}$, zbog čega je $\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{TP}$. Vidimo da točka T dijeli težišnicu $\overline{AP}$ u omjeru 2:1, zbog čega je T težište trokuta ABC. Sada je, zbog sličnosti, $\overrightarrow{HT}=2\overrightarrow{TS}$, čime je poučak dokazan.

Pravac koji sadrži točke S, T i H nekog trokuta zove se Eulerov pravac toga trokuta.

P.12. *Ako se u trokutu ABC podudaraju dvije od točaka S, T i H, tada se i treća od tih točaka podudara s tim dvjema.*

Dokaz. Prema P.11. vrijedi

$$\overrightarrow{HT}=2\overrightarrow{TS}\iff\overrightarrow{HS}=2\overrightarrow{TS}.$$

Ako se dvije od navedenih točaka podudaraju, tada je jedan od vektora $\overrightarrow{TS}$, $\overrightarrow{HT}$, ili $\overrightarrow{HS}$ nulvektor. Međutim, tada su i ina dva od tih vektora također nulvektori, što je moguće samo ako se i treća točka podudara s inim dvjema.

P.13. *Ako se u trokutu ABC točke S i H podudaraju, tada je trokut jednakostraničan.*

Dokaz. Kako je $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ i $\overline{SD} \perp \overline{BC}$, te ako je $S \equiv H$, tada se težišnica i visina povučene iz vrha A podudaraju. To isto vrijedi i za težišnice i visine iz ina dva vrha. Trokut kojemu se težišnice podudaraju s visinama jest jednakostraničan.

P.14. *Ako se u trokutu dvije od točaka S, T i H podudaraju, tada je trokut jednakostraničan.*

Dokaz. Tvrdnja poučka neposredno slijedi iz P.12. i P.13.

Ovaj poučak je obrat poznatog poučka: težište, ortocentar i središte jednakostraničnom trokutu opisane kružnice padaju u istu točku.

P.15. *U trokutu ABC vrijedi*

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SH}.$$

(Hamiltonov poučak)

Dokaz.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} &+ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\\ &= \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TC}\\ &= 3\overrightarrow{ST} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{SH}.\end{aligned}$$

U ovom smo kratkom dokazu koristili tvrdnje poučaka P.11. i P.6.

P.16. *Četverostruki zbroj kvadrata duljina težišnica trokuta jednak je trostrukom zbroju kvadrata duljina stranica toga trokuta.*

Dokaz. Prema P.8. vrijedi

$$\begin{aligned}&(2\overrightarrow{AP})^2 + (2\overrightarrow{BQ})^2 + (2\overrightarrow{CR})^2\\ &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})^2+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2,\\ &4(|AP|^2 + |BQ|^2 + |CR|^2)\\ &= 2(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)\\ &\qquad + 2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})\\ &= 2(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2)+\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\ &\qquad + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})\\ &= 2(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2)+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2\\ &= 3(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).\end{aligned}$$

P.17. *Ako je O bilo koja točka ravnine, a T težište trokuta ABC, tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}9|OT|^2 = 3(&|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2)\\ &- (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).\end{aligned}$$

Dokaz. Iz P.7. slijedi

$$(3\overrightarrow{OT})^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2,$$

a odatle:

$$\begin{aligned}9|OT|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2\\ &\quad + 2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}).\end{aligned}$$

Kako je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

to je

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}\\ &\implies 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2.\end{aligned}$$

Isto je tako

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} &= |OB|^2 + |OC|^2 - |BC|^2,\\ 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} &= |OC|^2 + |OA|^2 - |CA|^2.\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}9|OT|^2 = 3(&|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2)\\ &- (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).\end{aligned}$$

P.18. *Duljine stranica trokuta su a, b i c, a R je polumjer trokutu opisane kružnice. Za udaljenost središta i težišta trokuta vrijedi:*

$$|ST|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dokaz. Ako u P.17. za točku O uzmemo središte trokutu opisane kružnice (S), tada zbog $|OA| = |OB| = |OC| = R$, tvrdnja tog poučka prelazi u tvrdnju koju treba dokazati.