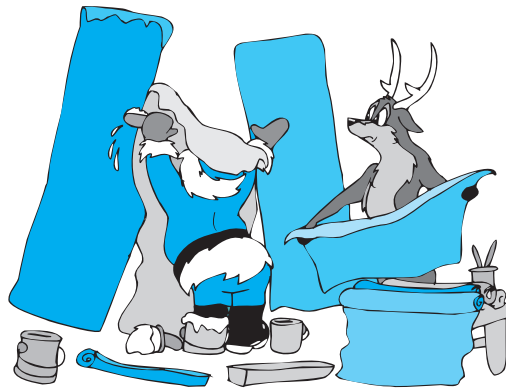


# Primjene metode ploština u dokazivanju nekih poučaka



Andjelko Marić, Sinj

Dokaz metodom ploština\* sastoji se u tome da se, iz odnosa ploština nekih likova, dobiju odnosi među drugim veličinama tih likova. To je, u biti, vrlo jednostavna metoda, u pravilu s isto tako jednostavnim i kratkim postupkom dokaza.

U članku će se dokazati neki planimetrijski poučci, od kojih se neki dokazuju (nekom drugom metodom) već u osnovnoj, a većina ostalih u srednjoj školi.

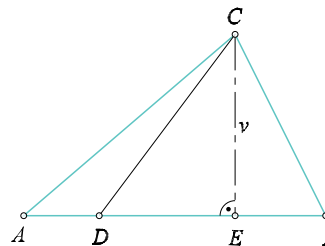
Na kraju će se tom metodom, što nije uobičajeno, dokazati nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja.

## 1. Poučak o spojnici vrha i točke na nasuprotnoj stranici trokuta

Spojnica vrha i bilo koje točke nasuprotne stranice dijeli trokut na dva trokuta čije su ploštine u omjeru u kojem ta točka dijeli stranicu.

*Dokaz.* Prema oznakama na sl. 1., treba dokazati da vrijedi  $P_{ACD} : P_{BCD} = |AD| :$

$|BD|$ . Trokuti  $ACD$  i  $BCD$  imaju zajedničku visinu iz vrha  $C$ , čija je duljina  $|CE| = v$ . Zato je  $P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot v$ ,  $P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot v$ , a odatle  $P_{ACD} : P_{BCD} = |AD| : |BD|$ .



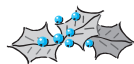
Sl. 1.

## 2. Poučak o težišnici trokuta

Težišnica trokuta dijeli trokut na dva trokuta jednakih ploština.

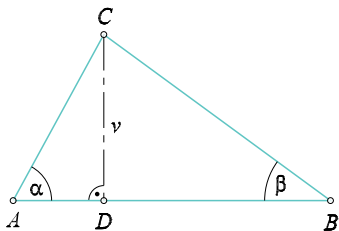
*Dokaz.* Ako je točka  $D$  na sl. 1. polovište stranice  $\overline{AB}$ , tada je dužina  $\overline{CD}$  težišnica trokuta  $ABC$  i, zbog  $|AD| = |BD|$ , prema poučku 1., vrijedi  $P_{ACD} = P_{BCD}$ .

\* Pitanje, zašto dati prednost riječi **ploština** (u značenju u kojem se ovdje rabi) umjesto uobičajenije riječi **površina** zaslužuje posebnu raspravu. Držim da obje riječi imaju mjesto u hrvatskom matematičkom nazivlju, ali nisu istoznačnice. Ploština je mjera površine. O tome, možda, više nekom drugom prigodom. Uostalom, neka ovo bude poticaj za raspravu.



### 3. Poučak o nožištu visine trokuta

Nožište visine iz jednog vrha trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru kotangensa unutarnjih kutova trokuta uz tu stranicu.

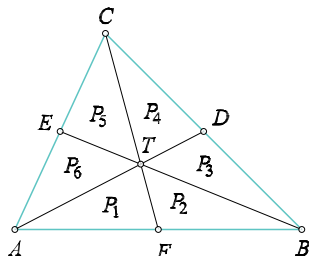


Sl. 2.

*Dokaz.* Kako je (vidi sl. 2.)  $|AD| = v \cdot \text{ctg } \alpha$ ,  $|BD| = v \cdot \text{ctg } \beta$ , to je, prema poučku 1.,  $|AD| : |BD| = \text{ctg } \alpha : \text{ctg } \beta$ , što je tvrdnja poučka.

### 4. Poučak o trokutima na koje je zadani trokut podijeljen težišnicama

Težišnice trokuta dijele trokut na šest trokuta jednakih ploština.



Sl. 3.

*Dokaz.* Težišnice  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  i  $\overline{CF}$  trokuta  $ABC$  dijele taj trokut na šest trokuta, čije smo ploštine označili kao na sl. 3.

Dužina  $\overline{TF}$  je težišnica trokuta  $ABT$ . Zato je, prema poučku 2.,  $P_1 = P_2$ . Iz istog razloga je  $P_3 = P_4$  i  $P_5 = P_6$ . Prema istom poučku vrijedi:  $P_1 + P_5 + P_6 = P_2 + P_3 + P_4$ , odakle je  $2P_5 = 2P_6 = 2P_3 = 2P_4$ , odnosno  $P_3 = P_4 = P_5 = P_6$ .

Isto tako  $P_1 + P_2 + P_3 = P_6 + P_5 + P_4$ , odakle je  $2P_1 = 2P_4 = 2P_5 = 2P_6$ . Zbog svega toga je:  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6$ .

Q.E.D.

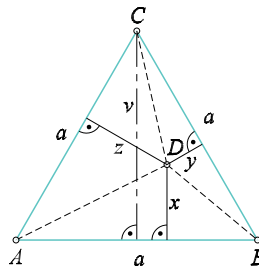
### 5. Poučak o težištu trokuta

Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1, mjereći od vrha trokuta.

*Dokaz.* Uz oznake kao na sl. 3., a prema poučku 1. vrijedi:  $|AT| : |DT| = P_{ABT} : P_{BDT} = (P_1 + P_2) : P_3$ . Kako prema poučku 4. vrijedi  $P_1 = P_2 = P_3$ , to je  $|AT| : |DT| = 2 : 1$ , čime je (za jednu težišnicu) poučak dokazan. Na isti način se dokaže i za ine dvije težišnice.

### 6. Poučak o unutarnjoj točki jednakostranična trokuta

Zbroj udaljenosti bilo koje točke unutar jednakostranična trokuta od stranica trokuta ne ovisi o izboru te točke i jednak je duljini visine trokuta.



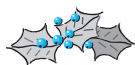
Sl. 4.

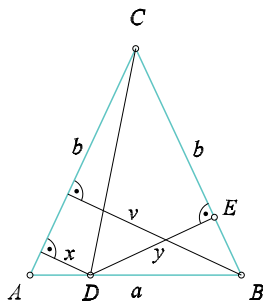
*Dokaz.* Neka je unutar jednakostranična trokuta  $ABC$ , duljine stranice  $a$ , dana bilo koja točka  $D$ , treba dokazati, uz oznake na sl. 4., da vrijedi  $x + y + z = v$ , gdje je  $v$  duljina visine trokuta, to jest  $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Kako je  $P_{ABD} + P_{BCD} + P_{ACD} = P_{ABC}$ , ili  $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}av$ , to je  $x + y + z = v$ , što je tvrdnja poučka.

### 7. Poučak o točki na osnovici jednokračna trokuta

Zbroj udaljenosti bilo koje točke na osnovici jednokračna trokuta od krakova trokuta ne ovisi o izboru te točke i jednak je duljini visine na krak toga trokuta.

*Dokaz.* Koristimo oznake na sl. 5. Treba dokazati da je  $x + y = v$ . Vrijedi:  $P_{ACD} + P_{BCD} = P_{ABC}$ , odnosno  $\frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}bv$ , ili  $x + y = v$ , što je trebalo i dokazati.

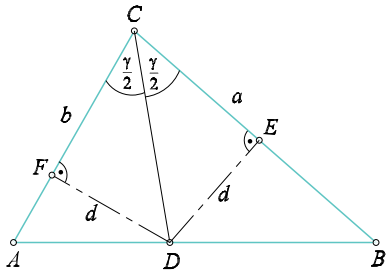




Sl. 5.

### 8. Poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta

Simetrala unutarnjeg kuta trokuta, povučena iz jednog vrha trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru duljina inih dviju stranica.



Sl. 6.

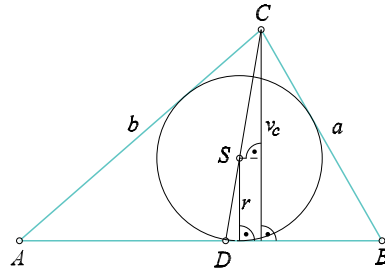
*Dokaz.* Koristimo: svaka točka simetrala kuta jednako je udaljena od krakova kuta. Zato je (vidi sl. 6.)  $|DE| = |DF| = d$ . Zato je  $P_{ACD} = \frac{1}{2}bd$ ,  $P_{BCD} = \frac{1}{2}ad$ , a odatle, prema poučku 1. dobijemo  $|AD| : |BD| = \frac{1}{2}bd : \frac{1}{2}ad$ , ili  $|AD| : |BD| = b : a$ . Time je poučak dokazan.

### 9. Poučak o središtu trokutu upisane kružnice

Središte trokutu upisane kružnice dijeli odsječak simetrale kuta unutar trokuta u omjeru zbroja duljina dviju stranica koje imaju zajednički vrh na toj simetrali i duljine treće stranice.

*Dokaz.* Uvedemo li oznake kao na sl. 7., treba dokazati da vrijedi  $|CS| : |SD| = (a + b) : c$ . Zbog sličnosti vrijedi  $\frac{|CD|}{|SD|} =$

$$\frac{v_c}{r} \Rightarrow \frac{|CS| + |SD|}{|SD|} = \frac{v_c}{r} \Rightarrow \frac{|CS|}{|SD|} + 1 = \frac{v_c}{r} \Rightarrow \frac{|CS|}{|SD|} + 1 = \frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{a+b+c}} = \frac{a+b+c}{c}$$

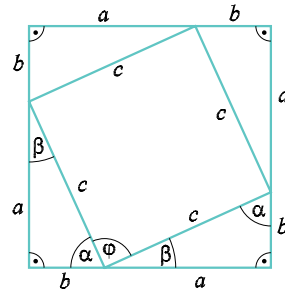


Sl. 7.

Dalje je:  $\frac{|CS|}{|SD|} = \frac{a + b + c}{c} - 1 = \frac{a + b}{c} + \frac{c}{c} - 1 = \frac{a + b}{c}$ , ili  $|CS| : |SD| = (a + b) : c$ , čime je poučak dokazan.

### 10. Pitagorin poučak

Zbroj kvadrata duljina kateta jednak je kvadratu duljine hipotenuze pravokutna trokuta.



Sl. 8.

*Dokaz.* Svaku stranicu kvadrata podijelimo na dva dijela čije smo duljine označili kao na sl. 8. Na taj način je kvadrat podijeljen na četiri trokuta i jedan četverokut. Budući su trokuti pravokutni i međusobno sukladni s duljinama kateta  $a$  i  $b$ , to su duljine stranica četverokuta jednake duljini hipotenuze tih trokuta, koju smo označili sa  $c$ . Zato je taj četverokut romb. Označimo li jedan (bilo koji) kut toga četverokuta s  $\varphi$ , tada vrijedi

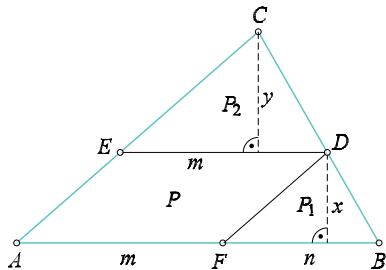


$\alpha + \varphi + \beta = 180^\circ$ . Kako je  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , to je  $\varphi = 90^\circ$ . Zato je taj romb kvadrat.

Ploština polaznog kvadrata jednaka je  $P = (a + b)^2$ . Zbrojimo li ploštine dijelova toga kvadrata, dobijemo:  $P = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$ . Izjednačavanjem tih izraza za ploštinu, dobit ćemo:  $(a + b)^2 = 2ab + c^2$ ,  $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ ,  $a^2 + b^2 = c^2$ , što je tvrdnja Pitagorina poučka.

### 11. Poučak o ploštinama paralelograma i dvaju trokuta na koji je podijeljen trokut

Ako se bilo kojom točkom jedne stranice trokuta povuku usporednice s inim dvjema stranicama, time je trokut podijeljen na jedan paralelogram i dva trokuta i vrijedi: ploština paralelograma jednaka je dvostrukoj geometrijskoj sredini ploština trokuta.

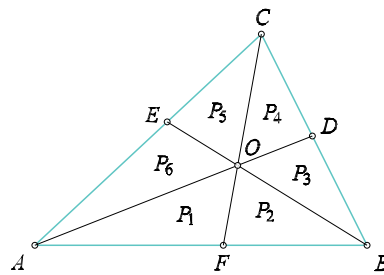


Sl. 9.

*Dokaz.* Trokut na sl. 9. zadovoljava uvjete poučka i treba dokazati da vrijedi:  $P = 2\sqrt{P_1P_2}$ . Za pojedine ploštine vrijedi:  $P = mx$ ,  $P_1 = \frac{1}{2}nx$ ,  $P_2 = \frac{1}{2}my$ . Zbog sličnosti vrijedi  $n : x = m : y \implies ny = mx$ . Zato je  $P_1P_2 = \frac{1}{2}nx \cdot \frac{1}{2}my = \frac{1}{2}mx \cdot \frac{1}{2}ny = \frac{1}{2}mx \cdot \frac{1}{2}mx = \left(\frac{1}{2}mx\right)^2 = \left(\frac{1}{2}P\right)^2$ , odakle je  $P = 2\sqrt{P_1P_2}$ , što je tvrdnja poučka.

### 12. Cevin poučak

Ako je  $O$  bilo koja točka unutar trokuta  $ABC$  i pravci  $AO$ ,  $BO$  i  $CO$  sijeku stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $D$ ,  $E$  i  $F$ , tada vrijedi:  $\frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1$ .



Sl. 10.

*Dokaz.* Koristimo oznake kao na sl. 10. Prema poučku 1. vrijedi:  $\frac{|OF|}{|OC|} = \frac{P_1}{P_5 + P_6} = \frac{P_2}{P_3 + P_4}$ , a odatle je  $\frac{P_1}{P_5 + P_6} = \frac{P_2}{P_3 + P_4}$ . Isto je tako  $\frac{P_3}{P_4} = \frac{P_1 + P_2}{P_5 + P_6}$ ,  $\frac{P_5}{P_6} = \frac{P_3 + P_4}{P_1 + P_2}$ . Množenjem ovih jednakosti dobijemo:

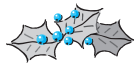
$$\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{P_3}{P_4} \cdot \frac{P_5}{P_6} = \frac{P_5 + P_6}{P_3 + P_4} \cdot \frac{P_1 + P_2}{P_5 + P_6} \cdot \frac{P_3 + P_4}{P_1 + P_2} = 1. \quad (*)$$

Kako je  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{|AF|}{|BF|}$ ,  $\frac{P_3}{P_4} = \frac{|BD|}{|CD|}$ ,  $\frac{P_5}{P_6} = \frac{|CE|}{|AE|}$ , to (\*) prelazi u  $\frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1$ , što je tvrdnja koju je trebalo dokazati.

### 13. Van Aubelov poučak

Ako je  $O$  bilo koja točka unutar trokuta  $ABC$  i pravci  $AO$ ,  $BO$  i  $CO$  sijeku stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $D$ ,  $E$  i  $F$ , tada vrijedi:  $\frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|AF|}{|BF|} + \frac{|AE|}{|CE|}$ ,  $\frac{|BO|}{|EO|} = \frac{|BF|}{|AF|} + \frac{|BD|}{|CD|}$ ,  $\frac{|CO|}{|FO|} = \frac{|CE|}{|AE|} + \frac{|CD|}{|BD|}$ .

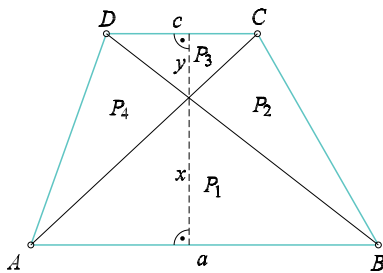
*Dokaz.* Koristimo oznake kao na sl. 10. Vrijedi:  $\frac{P_1 + P_2}{P_6} = \frac{|BO|}{|EO|} = \frac{P_3 + P_4}{P_5}$ , ili  $P_3P_6 + P_4P_6 = P_1P_5 + P_2P_5$ . Dalje je  $P_3^2P_6 + P_3P_4P_6 = P_1P_3P_5 + P_2P_3P_5$ . Kako je, vidi (\*) u dokazu poučka 12.,  $P_1P_3P_5 = P_2P_4P_6$ , to je  $P_3^2P_6 + P_3P_4P_6 = P_2P_3P_5 + P_2P_4P_6$ . Podijelimo li ovu jednakost s  $P_2P_3P_6$ , dobijemo:  $\frac{P_3}{P_2} + \frac{P_4}{P_2} = \frac{P_5}{P_6} + \frac{P_4}{P_3} \implies \frac{P_3 + P_4}{P_2} =$



$\frac{P_5}{P_6} + \frac{P_4}{P_3}$ , a odatle (prema poučku 1.), slijedi  $\frac{|CO|}{|FO|} = \frac{|CE|}{|AE|} + \frac{|CD|}{|BD|}$ . Istim se postupkom (ili kružnim zamjenama) dobiju i ine dvije formule poučka.

#### 14. Poučak o trokutima koje određuju po jedan krak i dijagonale trapeza

Dijagonale trapeza dijele trapez na četiri trokuta. Ploštine trokuta uz krakove trapeza su međusobno jednake.



Sl. 11.

*Dokaz.* Ploštine trokuta na koji je podijeljen trapez označimo kao na sl. 11. Treba dokazati da je  $P_2 = P_4$ . Vrijedi  $P_1 + P_2 = \frac{1}{2}ax$ ,  $P_1 + P_4 = \frac{1}{2}ax$ , odakle je  $P_2 = P_4$ , što je tvrdnja poučka.

#### 15. Poučak o trokutima koje određuju po jedna osnovica i dijagonale trapeza

Dijagonale trapeza dijele trapez na četiri trokuta. Za ploštinu trapeza  $P$  i za ploštine  $P_1$  i  $P_3$  trokuta uz osnovice trapeza vrijedi:  $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_3})^2$ .

*Dokaz.* Koristimo sl. 11., pri čemu je  $x + y = v$ . Zbog sličnosti vrijedi:  $a : x = c : y \implies ay = cx$ . Vrijedi:  $P_1 + P_2 = \frac{1}{2}av \implies P_2 = \frac{1}{2}av - \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}a(v - x) = \frac{1}{2}ay$ , to jest  $P_2 = \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}cx$ . Kako je, prema poučku 14.,  $P_2 = P_4$ , to je  $P_2P_4 = \frac{1}{2}ay \cdot \frac{1}{2}cx = \frac{1}{2}ax \cdot \frac{1}{2}cy = P_1P_3 \implies P_2 = P_4 = \sqrt{P_1P_3}$ . A zbog  $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ , to je  $P =$

$P_1 + P_3 + 2\sqrt{P_1P_3} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_3})^2$ , što je tvrdnja poučka.

#### 16. Nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine

Za pozitivne brojeve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  broj  $A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  zove se aritmetička, a broj  $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$  geometrijska sredina tih brojeva i vrijedi  $A \geq G$ , pri čemu vrijedi jednakost samo ako je  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Dokaz.* Provest ćemo dokaz metodom ploština, za  $n = 3$ .

Promatrajmo bilo koja tri pozitivna broja  $x_1, x_2$  i  $x_3$  i označimo  $x_1 + x_2 + x_3 = s$ . Neka je  $y_1 = s - x_1, y_2 = s - x_2, y_3 = s - x_3$ . Vrijedi:  $y_1 + y_2 = 2s - x_1 - x_2 > 2s - x_1 - x_2 - x_3 = s > y_3$ . Isto je tako  $y_2 + y_3 > y_1, y_3 + y_1 > y_2$ . Zato postoji trokut čije su duljine stranica  $y_1, y_2$  i  $y_3$ . Kako je opseg toga trokuta  $y_1 + y_2 + y_3 = 3s - (x_1 + x_2 + x_3) = 2s$ , to je njegova ploština, prema Heronovoj formuli:  $P_1 = \sqrt{s(s - y_1)(s - y_2)(s - y_3)} = \sqrt{sx_1x_2x_3}$ .

Jednakostraničan trokut jednakog opsega ( $2s$ ) ima duljinu stranice  $a = \frac{2s}{3}$ . Zato je ploština toga trokuta  $P_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}$ .

Kako od svih trokuta jednakog opsega najveću ploštinu ima jednakostraničan, to je  $P_2 \geq P_1 \implies \frac{s^2\sqrt{3}}{9} \geq \sqrt{sx_1x_2x_3} \implies \frac{s^4}{27} \geq sx_1x_2x_3 \implies \left(\frac{s}{3}\right)^3 \geq x_1x_2x_3 \implies \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ , što je nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine za  $n = 3$ .

Jednakost u dokazanoj nejednakosti vrijedi samo ako je i prvi trokut jednakostraničan, to jest ako je  $y_1 = y_2 = y_3$ , a odatle  $x_1 = x_2 = x_3$ . Time je postavljena tvrdnja u potpunosti dokazana.

