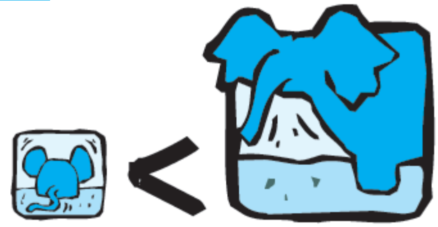


O rješavanju nejednadžbi

Mirko Franić, Trogir

Pri rješavanju nejednadžbi u I. razredu srednje škole, ali i u kasnijim razredima, primjenjujemo različite postupke i metode. Neki od tih postupaka mogu biti složeni; primjer je rješavanje grananjem u sve moguće slučajeve što vodi prema većem broju sustava nejednadžbi. Ne samo što je tada teško kontrolirati rješavanje, već nije jednostavno ni objediniti pojedinačna rješenja u konačni rezultat. Često se nailazi i na rješenja primjenom raznih tablica. Ona su pak opterećena formalizmom, pa se stoga vrlo brzo i zaborave. No jedna se metoda pokazala ipak najjednostavnijom i učenicima najprihvatljivijom. To je **grafička metoda.**

Vrlina te metode jest u njezinoj općenitosti.

Tako je primjerice vrlo učinkovito možemo koristiti za rješavanje složenijih jednadžbi i nejednadžbi s apsolutnim vrijednostima.

Prikažimo primjenu ove metode na rješavanje nejednadžbi oblika

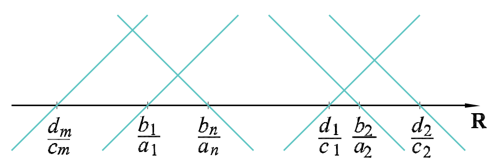
$$F(x) > 0, \qquad (1)$$

gdje je

$$F(x) = \frac{(a_1x - b_1)(a_2x - b_2)\cdots(a_nx - b_n)}{(c_1x - d_1)(c_2x - d_2)\cdots(c_mx - d_m)}$$

i gdje su koeficijenti a_i, b_i, c_j, d_j, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ realni brojevi.

Najprije nađemo nultočke svih linearnih polinoma u brojniku i nazivniku razlomka. To su brojevi $\frac{b_i}{a_i}$, $\frac{d_j}{c_j}$, koje ćemo smjestiti na brojevni pravac. Povučemo tim nultočkama odgovarajuće pravce vodeći računa o njihovu nagibu (pravci će biti rastući za $a_i > 0$ i $c_j > 0$, odnosno padajući za $a_i < 0$ i $c_j < 0$.



Sl. 1.

Brojevni je pravac nultočkama podijeljen na $n+m+1$ interval. Prebrojimo potom pravce koji su u pruzi ispod pojedinog intervala. Ako je taj broj paran, tada je $F(x) > 0$, a ako je neparan, tada je $F(x) < 0$.

Primjer 1. Riješite nejednadžbu:

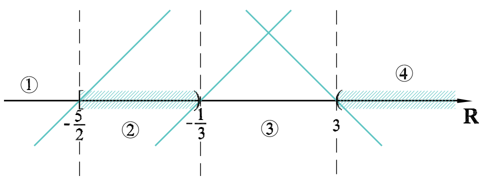
$$\frac{-8x - 20}{3 + 8x - 3x^2} \geq 0.$$

▶ Najprije nejednadžbu zapišemo u obliku $\dfrac{-4(2x+5)}{(3-x)(3x+1)} \geq 0$. Nejednadžba je ekvivalentna nejednadžbi

$$\frac{2x+5}{(3-x)(3x+1)} \leq 0,$$

a ova posljednja je oblika (1). Nultočke triju linearnih polinoma su $-\frac{5}{2}$, 3 i $-\frac{1}{3}$.

Rasporedimo te nultočke na brojevnom pravcu te položimo njima pravce:



Sl. 2.

Brojevni je pravac nultočkama razdijeljen na četiri intervala i vidimo da je broj pravaca ispod intervala *2* i *4* neparan. U tim su intervalima sva rješenja zadane nejednadžbe. Drugim riječima, rješenje nejednadžbe je svaki realni broj x, $x \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$. ◀

Primijetimo da pri smještanju nultočaka na brojevni pravac ne moramo paziti na točne razmake između pojedinih točaka već samo na točan redoslijed točaka ovisno o veličini njihovih koordinata. U tom smislu nije potrebno crtati ni os ordinata jer bi nas to obvezivalo na ovdje nebitnu točnost grafičkog prikaza pojedinih linearnih funkcija. Naime, pri rješavanju nejednadžbi nisu bitne vrijednosti pojedinih funkcija, već samo predznaci tih vrijednosti.

Pri ucrtavanju pravaca valja paziti na njihov nagib. Tu nam je jedina briga predznak nagiba, nije bitan njegov iznos. No moglo bi se lako postići da je nagib svih pravaca istog predznaka, uzmimo pozitivnog. Tako bismo primjerice u prethodnom zadatku nejednadžbu $\dfrac{2x+5}{(3-x)(3x+1)} \leq 0$ zamijenili ekvivalentnom nejednadžbom $\dfrac{2x+5}{(x-3)(3x+1)} \geq 0$ te bi sva tri pravca imala pozitivan nagib.

Nejednadžbe $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ i $f(x) \cdot g(x) > 0$ su ekvivalentne. Stoga ćemo na jednak način rješavati i sljedeći zadatak:

Primjer 2. Riješite nejednadžbu

$$(2x^2 - 3x - 2)(4 - 4x - 3x^2) \leq 0.$$

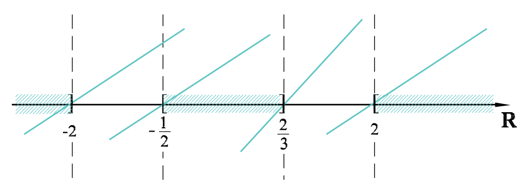
▶ Postupamo na jednak način. Najprije lijevu stranu nejednadžbe zapišemo u obliku

$$(2x+1)(x-2)(x+2)(2-3x) \leq 0.$$

Želimo li da sve linearne funkcije, odnosno pravci koji su njihovi grafovi, imaju pozitivan nagib, nejednadžbu ćemo zamijeniti ekvivalentnom nejednadžbom

$$(2x+1)(x-2)(x+2)(3x-2) \geq 0.$$

I sada crtamo:



Sl. 3.

Ispod svakog od triju intervala

$$\langle -\infty, -2], \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \quad \text{i} \quad [2, +\infty\rangle$$

paran je broj pravaca, te je njihova unija skup rješenja dane nejednadžbe.