Zoran Topić, Imotski

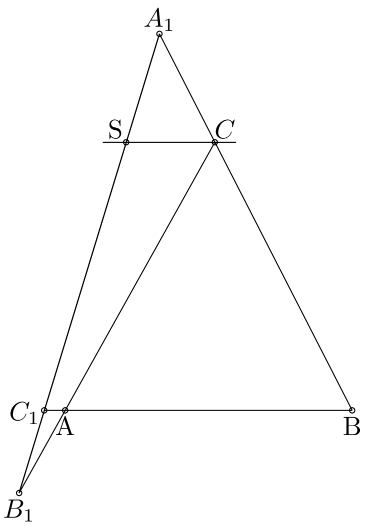
A Menelajev teorem i neke primjene

U ovom članku ćemo dokazati Menelajev[1] teorem i pokazati neke primjene tog teorema. Menelajevo najvažnije djelo je Sphaerica u kojem dokazuje i Menelajev teorem.

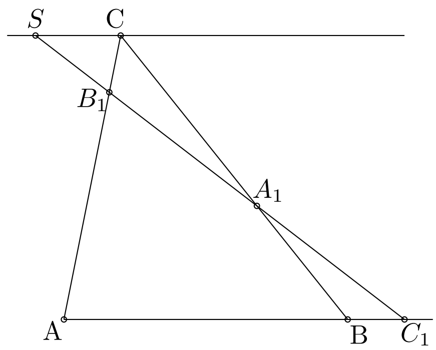
Teorem 1 *(Menelajev teorem)Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i neka su točke A_1,B_1 i C_1 na pravcima BC ,CA i AB .Točke A_1,B_1 i C_1 leže na jednom pravcu ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \tag{1}$$

Dokaz:Pretpostavimo da su točke A_1,B_1 i C_1 na jednom pravcu,odnosno da su kolinearne.Dokažimo da vrijedi (1).Povucimo točkom C trokuta $\triangle ABC$ paralelu s pravcem AB i neka ona siječe pravac A_1B_1 u točki S.



Slika 1.



Slika 2.

Primijetimo da vrijedi $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle A_1SC$ i $\triangle B_1CS \sim \triangle B_1AC$ (K-K-K), pa je

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BC_1|}{|CS|}, \qquad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CS|}{|AC_1|}$$

pa vrijedi i (1).

Neka su sada točke A_1,B_1 i C_1 za koje vrijedi (1). Dokažimo da one leže na jednom pravcu. Možemo pretpostaviti da točka C_1 nije na stranici trokuta.Povucimo pravac C_1A_1 i neka on siječe pravac AC u točki B_2.Prema prvom dijelu teorema vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} = 1$$

[1]Menelaj Aleksandrijski(70.-140.) je starogrčki matematičar koji je djelovao u Aleksandriji.

pa vrijedi i

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|B_2C|}{|B_2A|} = \lambda.$$

Dokažimo da je $B_1 = B_2$
1.slučaj:(slika 2.) Točke A_1 i B_1 su na stranicama trokuta. Vrijedi $|AC| = |B_1A| + |B_1C|$, pa je $|B_1A| = \frac{1}{1+\lambda}|CA|$ .Slično se vidi da vrijedi $|B_2A| = \frac{1}{1+\lambda}|CA|$, pa je $B_1 = B_2$.

2.slučaj:(slika 1.) Točke A_1 B_1 i C_1 nisu na stranicama trokuta $\triangle ABC$.Tada je $|AC| = |B_1A| - |B_1C|$ pa je $|B_1A| = \frac{1}{1-\lambda}|CA|$.Slično vrijedi $|B_2A| = \frac{1}{1-\lambda}|CA|$, pa je $B_1 = B_2$. $\square$
Prvi teorem kojeg ćemo dokazati primjenom Menelajeva teorema je Euklidski slučaj poznatog Desargesova[2] teorema.

Teorem 2 *(Desarguesov teorem) U ravnini su dani trokuti $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ takvi da postoje točke X=$C_1A_1 \cap C_2A_2$,Y=$A_1B_1 \cap A_2B_2$,$Z = B_1C_1 \cap B_2C_2$, $X_1 = A_1A_2 \cap B_1B_2$,$Y_1 = B_1B_2 \cap C_1C_2$ i $Z_1 = A_1A_2 \cap C_1C_2$. Točke X, Y i Z su kolinearne ako i samo ako je $X_1 = Y_1 = Z_1 = O$.*

Drugim riječima (ako dani presjeci postoje) pravci A_1A_2,B_1B_2 i C_1C_2 prolaze jednom tokom O ako i samo ako su točke X,Y i Z kolinearne.

Dokaz:Pretpostavimo da pravci C_1C_2,A_1A_2 i B_1B_2 prolaze kroz jednu točku O.Dokažimo da su točke X,Y i Z kolinearne.(Slika 3.)
Primjenimo Menelajev teorem na $\triangle OA_2B_2$ i kolinearne točke A_1,B_1 i Z.Vrijedi

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} \cdot \frac{|A_2Z|}{|B_2Z|} \cdot \frac{|B_1B_2|}{|B_1O|} = 1. \tag{2}$$

Primjenimo Menelajev teorem na $\triangle OA_2C_2$ i kolinearne točke A_1,C_1 i X.Vrijedi

$$\frac{|A_2X|}{|C_2X|} \cdot \frac{|C_2C_1|}{|C_1O|} \cdot \frac{|OA_1|}{|A_2A_1|} = 1. \tag{3}$$

Primjenimo Menelajev teorem na $\triangle OB_2C_2$ i kolinearne točke B_1,C_1 i Y .Vrijedi

$$\frac{|OC_1|}{|C_1C_2|} \cdot \frac{|C_2Y|}{|B_2Y|} \cdot \frac{|B_2B_1|}{|B_1O|} = 1. \tag{4}$$

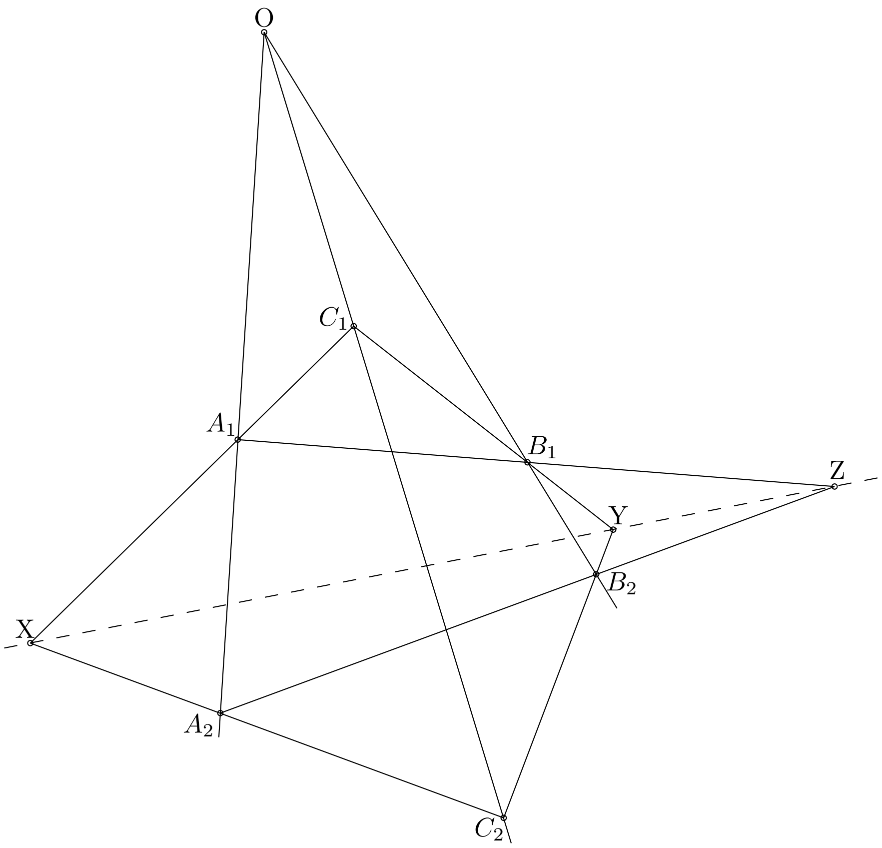
Iz (2),(3) i (4) vrijedi

$$\frac{|A_2Z|}{|ZB_2|} \cdot \frac{|B_2Y|}{|C_2Y|} \cdot \frac{|C_2X|}{|XA_2|} = 1.$$

Primjenom Menelajeva teorema na točke X,Y i Z i trokut $\triangle A_2B_2C_2$,slijedi da su točke X,Y i Z kolinearne.
Obratno,pretpostavimo da su točke X,Y i Z kolinearne.Pokažimo da pravci C_1C_2,A_1A_2 i B_1B_2 prolaze jednom točkom.Iz pretpostavki teorema je $X_1 = B_1B_2 \cap A_1A_2$.Pokažimo da i pravac C_1C_2 prolazi kroz X_1 .Primjetimo trokute $\triangle B_2B_1Y$ i $\triangle A_2A_1X$. Pravci XY,A_1B_1 i A_2B_2 prolaze kroz Z,pa primjenom upravo dokazanog dijela ovog teorema ,slijedi da su točke C_1,C_2 i X_1 kolinearne.

[2] Girard Desarges (1591.-1661.) je francuski matematičar i jedan od osnivača projektivne i nacrtne geometrije.

Prema tome, pravci C_1C_2,A_1A_2 i B_1B_2 se sijeku u točki $X_1 = O$, što je trebalo i dokazati.□



Slika 3.

Poligoni upisani u kružnicu imaju neka zanimljiva svojstva.Jedno od najzanimljivijih svojstava je otkrio Blase Pascal[3].Pascal je otkrio sljedeći teorem kad je imao 16 godina.

Teorem 3 *(Pascalov šesterokut)Sjecišta parova nasuprotnih stranica šesterokuta upisanog u kružnicu leže na istom pravcu.*

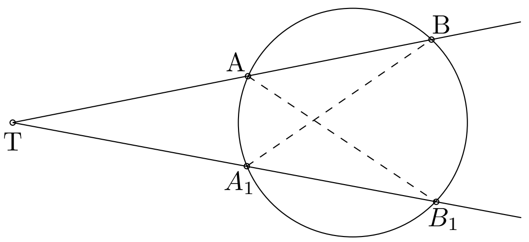
Prije dokaza teorema dokažimo sljedeću lemu koju ćemo koristiti u dokazu teorema.

Lema 1 *Neka je K kružnica i T točka u ravnini.Povucimo točkom T bilo koje pravace p_1 i p_2 i neka oni sijeku kručnicu K redom u točkama A i B i A_1 i B_1.(slike 4. i 5.)Tada vrijedi*

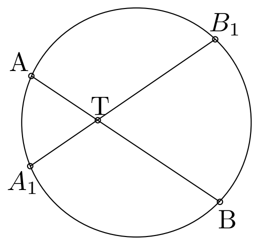
$$|TA| \cdot |TB| = |TA_1| \cdot |TB_2|.$$

Dokaz:Primjetimo da vrijedi $\sphericalangle TBA_1 = \sphericalangle TB_1A$,pa slijedi da je $\triangle TA_1B \sim \triangle TAB_1$(K-K-K). Prema tome vrijedi $\frac{|TA|}{|TB_1|} = \frac{|TA_1|}{|TB|}$ pa vrijedi i tvrdnja leme. □.

[3]Blase Pascal(1623.-1662.) je francuski matematičar,fizičar i filozof.

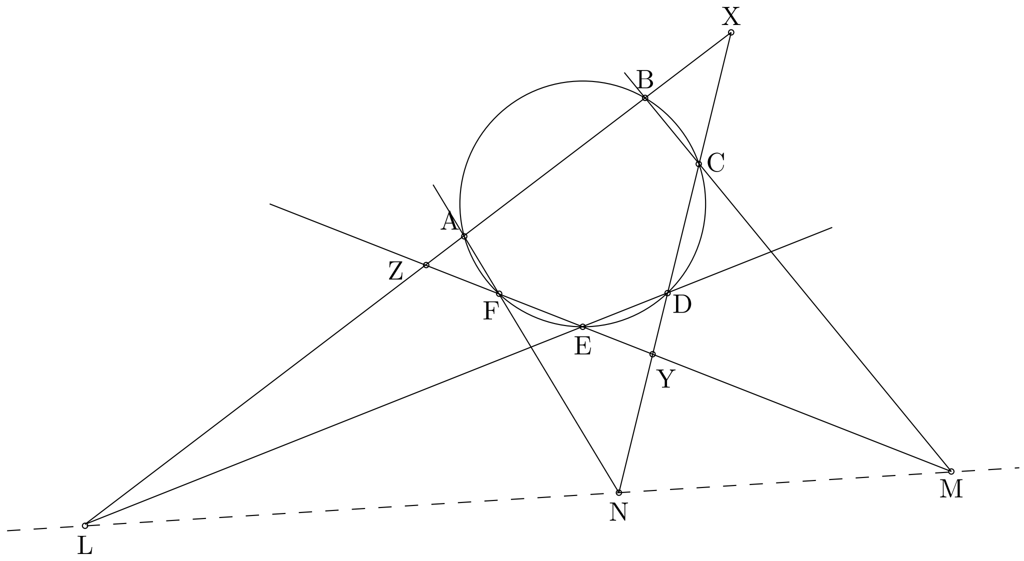


Slika 4.



Slika 5.

Dokaz teorema:Neka je $L = AB \cap DE$,$M = BC \cap EF$,$N = CD \cap AF$,$X = AB \cap DC$,$Y = EF \cap DC$,$Z = AB \cap FE$.Trebamo dokazati da su točke L,M i N kolinearne(Slika 6.).Dokažimo najprije teorem u slučaju kad postoje točke X,Y i Z.



Slika 6.

Primjenimo Menelajev teorem na $\triangle XYZ$ i kolinearne točke B,C i M pa vrijedi

$$\frac{|ZB|}{|XB|} \cdot \frac{|XC|}{|CY|} \cdot \frac{|YM|}{|MZ|} = 1. \tag{5}$$

Primjenimo Menelajev teorem na $\triangle XYZ$ i kolinearne točke A,F i N pa vrijedi

$$\frac{|ZA|}{|XA|} \cdot \frac{|XN|}{|NY|} \cdot \frac{|YF|}{|FZ|} = 1. \tag{6}$$

Primjenimo Menelajev teorem na $\triangle XYZ$ i kolinearne točke D,E i L pa vrijedi

$$\frac{|ZL|}{|XL|} \cdot \frac{|XD|}{|DY|} \cdot \frac{|YE|}{|EZ|} = 1. \tag{7}$$

Iz (5),(6) i (7) vrijedi

$$\frac{|ZL|}{|XZ|} \cdot \frac{|XN|}{|YN|} \cdot \frac{|YM|}{|ZM|} = \frac{|DY| \cdot |EZ| \cdot |XA| \cdot |FZ| \cdot |XB| \cdot |CY|}{|XD| \cdot |YE| \cdot |ZA| \cdot |YF| \cdot |ZB| \cdot |XC|}.$$

Primjenom Leme 1 vrijedi

$$\frac{|ZL|}{|XL|} \cdot \frac{|XN|}{|YN|} \cdot \frac{|YM|}{|ZM|} = 1$$

pa iz Menelajevog teorema slijedi da su točke L,N i M kolinearne. Ako jedna od X,Y i Z točaka ne postoji neka je $X_1 = BC \cap DE$,$Y_1 = DE \cap FA$ i $Z_1 = FA \cap BC$.Slično kao u prethodnom slučaju primjenimo Menelajev teorem tri puta na trokut $\triangle X_1Y_1Z_1$ i kolinearne točke ({L,A,B},{N,D,C} i {M,E,F}). Primjenom leme 1 dobijemo

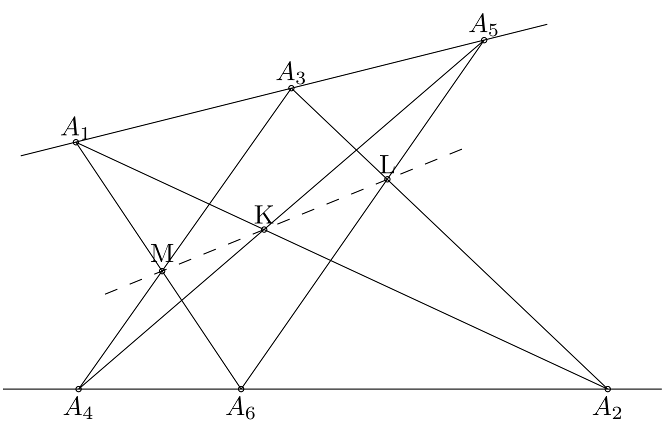
$$\frac{|Z_1N|}{|NY_1|} \cdot \frac{|Y_1L|}{|X_1L|} \cdot \frac{|X_1M|}{|Z_1M|} = 1$$

pa primjenom Menelajeva teorema slijedi da su točke L,N i M kolinearne. $\square$

Sljedeći teorem je otkrio starogrčki matematičar Pappus[4].Mnogo kasnije ovaj teorem je postao bitan u izgradnji projektivne geometrije.

Teorem 4 *(Pappusov teorem)Neka su p_1 i p_2 dva pravca u ravnini ,te neka su točke A_1,A_3 i A_5 na p_1, a točke A_4,A_6 i A_2 na p_2. Točke $K = A_1A_2 \cap A_4A_5$,$L = A_5A_6 \cap A_3A_2$ i $M = A_1A_6 \cap A_4A_3$ su kolinearne .(Slika 7.)*

Dokaz:Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su pravci paralelni.Naime,ako se ti pravci sijeku onda na pravcu koji je okomit na ravninu određenu pravcima u točki presjeka uzmeno bilo koju točku i iz nje projiciramo te pravce na ravninu koja je paralelna tom pravcu.Točka presjeka se zbog paralelnosi okomice i ravnine(na koju se projicira) ne projicira na tu ravninu pa su projicirani pravci paralelni.

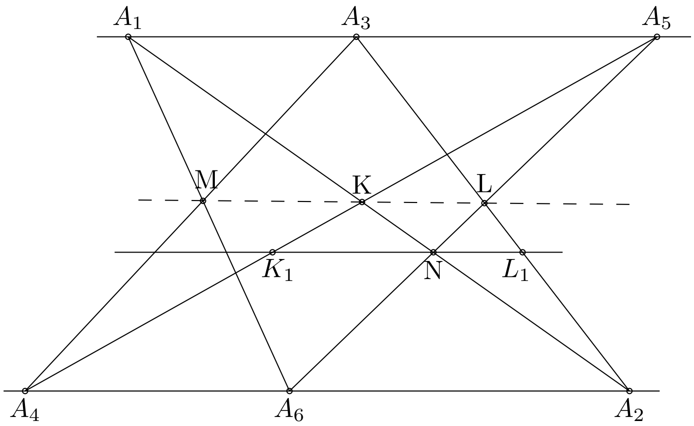


Slika 7.

Pri projiciranju se čuva incidencija i kolinearne točke se preslikavaju u kolinearne pa je tvrdnju dovoljno dokazati za paralelne pravce.Dokažimo tvrdnju za paralelne

[4](290. - 350.)jedan od posljednjih velikih starogrčkih matematičara,djelovao je u Aleksandriji.

pravce p_1 i p_2.Neka je $N = A_1A_2 \cap A_5A_6$. Točkom N povucimo paralelu sa danim pravcima i označimo sa K_1 i L_1 sjecišta te paralele sa pravcima A_4A_5 i A_2A_3 (Slika 8.).



Slika 8.

Primjetimo da u ovim uvjetima vrijedi

$$\frac{|A_1N|}{|A_5N|} = \frac{|A_1A_2|}{|A_5A_6|},$$

$\triangle A_1MA_3 \sim \triangle A_6MA_4$,$\triangle A_2LA_6 \sim \triangle L_1LN$, $\triangle A_1KA_5 \sim \triangle NKK_1$, $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle NA_2L_1$, $\triangle A_4A_6A_5 \sim \triangle K_1NA_5$,$\triangle A_2A_6N \sim \triangle A_1A_5N$(K-K-K) pa imamo

$$\frac{|A_1M|}{|MA_6|} \cdot \frac{|LA_6|}{|LN|} \cdot \frac{|NK|}{|A_1K|} = \frac{|A_1A_3|}{|A_4A_6|} \cdot \frac{|A_2A_6|}{|L_1N|} \cdot \frac{|NK_1|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1A_3|}{|L_1N|} \cdot \frac{|NK_1|}{|A_4A_6|} \cdot \frac{|A_2A_6|}{|A_5A_1|} =$$

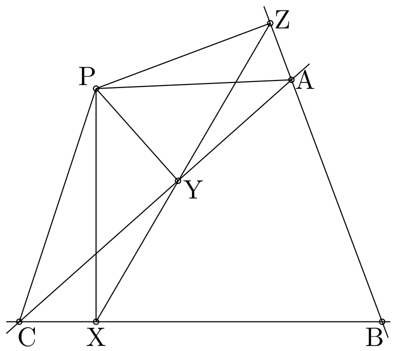
$$= \frac{|A_1A_2|}{|A_2N|} \cdot \frac{|NA_5|}{|A_5A_6|} \cdot \frac{|A_2A_6|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1N|}{|A_2N|} \cdot \frac{|NA_5|}{|A_5N|} \cdot \frac{|A_2N|}{|NA_1|} = 1$$

Primjenimo sada Menelajev teorem na $\triangle A_1A_6N$ i točke K,L i M pa slijedi da su te točke kolinearne.□

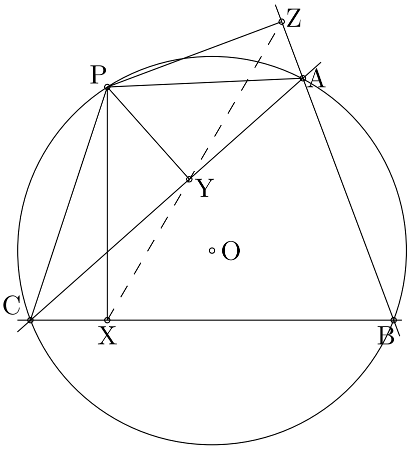
Pokažimo još neke rezultate koji se mogu dokazati pomoću Menelajeva teorema.

Primjer 1 *(Simsonov teorem)Zadan je trokut $\triangle ABC$ i točka P u ravnini.Neka su X,Y i Z nožišta okomica iz točke P na pravce BC,CA i AB.Točke X,Y i Z su kolinearne ako i samo ako točka P na tom trokutu opisanoj kružnici.*

Dokaz:Dokažimo ako je P na opisanoj kružnici trokuta $\triangle ABC$ da su točke X,Y i Z kolinearne.(Slika 10.) Budući da je četverokut PCBA tetivni vrijedi $\sphericalangle PAY = \sphericalangle PBX$ pa je $\triangle PXB \sim \triangle PYA$(K-K-K),i vrijedi $\frac{|BX|}{|YA|} = \frac{|PX|}{|PY|}$.Iz istog razloga je $\sphericalangle PAZ = \sphericalangle PCX$ pa je $\triangle PZA \sim \triangle PXC$(K-K-K),pa vrijedi $\frac{|AZ|}{|XC|} = \frac{|PZ|}{|PX|}$.Slično se vidi da vrijedi $\triangle PZB \sim \triangle PYC$ pa je $\frac{|CY|}{|ZB|} = \frac{|PY|}{|PZ|}$.Množeći ove tri jednakosti i primjenjujući Menelajev teorem na trokut $\triangle ABC$ i točke X,Y i Z vidimo da točke X,Y i Z leže na jednom pravcu. Obrnuto,neka su točke X,Y i Z kolinearne.Dokažimo da je točka P na opisanoj kružnici trokuta (Slika 9.).Vrijedi $\sphericalangle AYZ = \sphericalangle XYC$.Četverokuti PYZA i PCXY su tetivni pa je $\sphericalangle AYZ = \sphericalangle APZ$ i $\sphericalangle CYX = \sphericalangle CPX$.Dalje je i četverokut PXZB tetivni,pa je kut $\sphericalangle XPZ = \pi - \beta$ pa je i kut $\sphericalangle CPA = \pi - \beta$,a to povlači da je četverokut APBC tetivni,pa mu se može opisati kružnica.$\square$.



Slika 9.



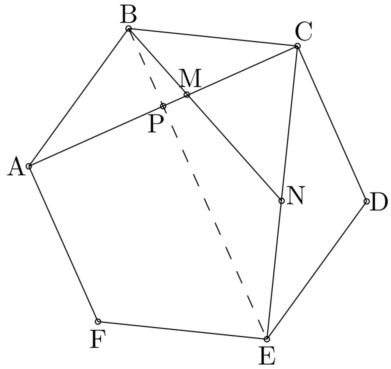
Slika 10.

Pravac kroz točke X,Y i Z zove se Simsonov pravac trokuta $\triangle ABC$ pridružen točki P opisane kružnice trokuta. Sljedeći zadatak se pojavio na natjecanju učenika srednjih škola.

Primjer 2 *Na dijagonalama AC i CE pravilnog šesterokuta ABCDEF izabrane su unutrašnje točke M i N ,takve da je* $\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = \lambda$.*Ako se zna da su točke B,M i N na istom pravcu ,odrediti* λ.

(23.IMO 1982.,Mađarska,vidi [2])

Dokaz:Neka je $P = BE \cap AC$.Primjenimo Menelajev teorem na trokut $\triangle CPE$ i kolinearne točke B,M i N (Slika 11.).Vrijedi,



Slika 11.

$$\frac{|CM|}{|MP|} \cdot \frac{|PB|}{|BE|} \cdot \frac{|EN|}{|NC|} = 1. \tag{8}$$

Računajući faktore u (8) dobijemo

$$\frac{|CM|}{|MP|} = \frac{1-\lambda}{\lambda - \frac{1}{2}} = \frac{2-2\lambda}{2\lambda - 1}; \tag{9}$$

$$\frac{|PB|}{|BE|} = \frac{1}{4}; \tag{10}$$

$$\frac{|EN|}{|NC|} = \frac{1-\lambda}{\lambda}. \tag{11}$$

Uvrstimo (9),(10) i(11) u (8) dobijemo

$$\frac{2-2\lambda}{2\lambda-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\lambda}{\lambda} = 1$$

,pa je $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.□
Primjenom Menelajeva teorema mogu se riješiti i sljedeći zadaci koje prepuštamo čitatelju.

Zadatak 1 *Dokazati da tangente povučene u vrhovima trokuta na njemu opisanu kružnicu sijeku nasuprotne stranice trokuta u tri kolinearne točke.*

Zadatak 2 *(Ptolomejev teorem)Za četiri točke A,B,C i D u ravnini vrijedi*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |CA| \cdot |BD|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su A,B,C i D uzastopne točke na nekoj kružnici ili pravcu.(Koristite Simsonov teorem.)

Zadatak 3 *(Cevin teorem) Neka su točke A_1,B_1 i C_1 na stranicama $\overline{BC}$,$\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AA_1,BB_1 i CC_1 prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Literatura

[1] PAVKOVIĆ,VELJAN,Elementarna matematika 1. i 2.,Školska knjiga Zagreb,1995.

[2] Ž.HANJŠ,Međunarodne matematičke olimpijade,Element,Zagreb,2009.