LIMESI
Limes niza

Definicija 1
Niz (a_n) realnih brojeva je konvergentan ako postoji realni broj a takav da niz (a_n) teži broju a kada n neograničeno raste.

$$a_n \to a \text{ kad } n \to \infty.$$

Kažemo da je a **limes** (granična vrijednost) **niza** i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Definicija 2
Realan broj a je limes niza realnih brojeva (a_n) ako za svaki ε > 0 postoji prirodni broj n_0 takav da za svaki n > n_0 vrijedi

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Pravila
Ako je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ i } \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

tada vrijedi:

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

(limes zbroja je zbroj limesa)

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$

(limes razlike je razlika limesa)

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

(limes produkta je produkt limesa)

4) $\lim_{n\to\infty} c = c$, c je konstanta

5) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$, c je konstanta

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

(limes kvocijenta je kvocijent limesa)

7) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$

(limes niza apsolutnih vrijednosti je apsolutna vrijednost limesa)

8) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

9) $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = a^b$

10) $\left.\begin{matrix} \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to\infty} b_n = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\, a_n \le c_n \le b_n \,] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$

11) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^m = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^m = a^m$, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

(limes potencije je potencija limesa)

12) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{a}$

13) Ako je $a_n \le b_n$ za svaki n onda je

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

14) $\lim_{n\to\infty}(a_n + c) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} c = a + c$

Limes funkcije

Definicija 1 (H. E. Heine)

Realan broj A jest granična vrijednost funkcije $f: D \to R$ u točki $a \in D$, ako za svaki niz (a_n) iz D i $a_n \to a,\ a_n \ne a$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$

Definicija 2 (A. L. Cauchy)

Broj A je granična vrijednost funkcije $f: D \to R$ u točki $a \in D$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ takav da za

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \text{ slijedi } |A - f(x)| < \varepsilon.$$

Pravila

Ako je

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) = B$$

tada vrijedi:

1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$

2) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A - B$

3) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$, $\lim_{x\to a} g(x) \ne 0$

5) $\lim_{x\to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot A$, c je konstanta

6) $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)} = A^B$

7) $\left.\begin{matrix}\lim_{x\to a} f(x) = A \\ \lim_{x\to a} g(x) = A\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\, f(x) < h(x) < g(x) \,\right] \Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = A$

8) $\lim_{x\to a}(f(x))^m = A^m$, $m \in Q$

9) $\lim_{x\to a}|f(x)| = |A|$

10) $\lim_{x\to a} c^{f(x)} = c^{\lim_{x\to a} f(x)}$

Tablica nekih limesa

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$	$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to0}x^x=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C=0.5772$ Eulerova konstanta				$\lim\limits_{x\to\infty}q^x=0\ ,\ \lvert q\rvert<1$	
$\lim\limits_{n\to\infty}\lvert x\rvert^n=\begin{cases}0 \text{ ako je } \lvert x\rvert<1\\ 1 \text{ ako je } \lvert x\rvert=1\\ \infty \text{ ako je } \lvert x\rvert>1\end{cases}$			$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1\ ,\ x>0$		$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n\,!}}=e$	$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$		$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0\ ,\ k\in N$		
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$			$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e\ ,$ kad $x_n\to\infty$		
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^{\alpha}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta\cdot x}=e^{\alpha\cdot\beta}$		$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$		
$\lim\limits_{x\to0}(1+\alpha\cdot x)^{\frac{\beta}{x}}=e^{\alpha\cdot\beta}$			$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$		
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\frac{1}{n}}=s$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$		$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$	
$\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=e$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$		$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ ne postoji	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$			$\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$ kad $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$		
$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$		$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3}=\infty$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(n\cdot x)}{x}=n$	
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_m\cdot x^m+a_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_\circ}{b_n\cdot x^n+b_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+b_2\cdot x^2+b_1\cdot x+b_\circ}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_n} & \text{kada je } m=n\\ 0 & \text{kada je } m<n\\ \pm\infty & \text{kada je } m>n\end{cases}$ $(m,n\in N_\circ\ ,\ a_\circ,a_1,\ldots,a_m,b_\circ,b_1,\ldots,b_n\in R\ ,\ a_m,b_n\neq0)$					
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0\ ,\ p\in R\ ,\ a>1$			$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ kad $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$		
$\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=1$		$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(a\cdot x)}{tg(b\cdot x)}=\frac{a}{b}$	
$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x\cdot\cos x}{x-\sin x}=3$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}=2\cdot\cos a$			$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(m\cdot x)}{\sin(n\cdot x)}=\frac{m}{n}$	

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\begin{cases} a \text{ kad je } a=b \\ a \text{ kad je } a>b \ , \ a\cdot b\neq 0 \\ b \text{ kad je } a<b \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|}=1 \ , \ a\in R$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a\cdot x)-\cos(b\cdot x)}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$$

$$\lim_{x\to a}\left(\ln f(x)\right)=\ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^p}=0$$

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=-\sin a$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a} \ , \ a>0$$

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\sin x$ ne postoji

Za polinom

$$p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_\circ$$

vrijedi $\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$

Za polinome

$$p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_\circ \text{ i } q(x)=b_m\cdot x^m+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+b_1\cdot x+b_\circ$$

vrijedi $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)} \ , \ q(a)\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0 \ , \ p>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{c}{f(x)}=\frac{c}{\lim_{x\to a} f(x)}, \ \lim_{x\to a} f(x)\neq 0$$

Limes oblika

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)}$$

1) Ako postoje $\lim_{x\to a} u(x)=A$ i $\lim_{x\to a} v(x)=B$ tada je

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)}=A^B .$$

2) Ako je $\lim_{x\to a} u(x)=A\neq 1$ i $\lim_{x\to a} v(x)=\pm\infty$ traženi limes računamo neposredno.

3) Ako je $\lim_{x\to a} u(x)=1$ i $\lim_{x\to a} v(x)=\infty$ tada je

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)}=e^{\lim_{x\to a}(u(x)-1)\cdot v(x)} .$$

L' Hospitalovo pravilo

Ako su f i g funkcije da je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ili } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

i postoji

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

tada je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

To se pravilo primjenjuje za neodređene oblike $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$.

Ako razlomak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ponovno daje neodređeni oblik u točki x = a $\left(\frac{0}{0} \text{ ili } \frac{\infty}{\infty}\right)$ onda se može prijeći na kvocijent $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ itd. Neodređeni oblici $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0°, 1^{∞}, ∞° pomoću odgovarajućih transformacija svode se na jedan od dva oblika: $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.