Descartes i Wallis o imaginarnoj jedinici

Vedran Levanić, Ivanec

Uvod — o povijesti imaginarnih brojeva

U svijetu matematike i raznolikim vrstama brojeva svoje mjesto našli su i imaginarni brojevi, brojevi koji su kroz povijesnu matematičku baštinu zaintrigirali mnoge matematičare. Neki od njih su ih odbacivali kao brojeve jer su ih smatrali besmislenima, dok su ih neki željeli shvatiti, proučavati i definirati. Među njima najpoznatija je imaginarna jedinica i. Njeno znamenito svojstvo jest da njezin kvadrat daje broj -1, tj. vrijedi $i^2 = -1$. Ako promatramo jednadžbu $x^2 + 1 = 0$, ona je jedno od njezinih dvaju rješenja i to ne u skupu realnih brojeva već u skupu kompleksnih brojeva. Pojam imaginarnih brojeva se kao jedna od neizbježnih matematičkih ideja pokazala upravo u omogućavanju proširenja skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ na skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Osim samog shvaćanja koncepta imaginarnog broja, a time i imaginarne jedinice u rješavanju jednadžbi, mnogi matematičari su kroz povijest pokušavali objasniti geometrijsku interpretaciju imaginarne jedinice. Prvi među njima su bili René Descartes i John Wallis. Njihove pokušaje ćemo detaljnije razraditi nakon što ukratko iznesemo nekoliko povijesnih činjenica o imaginarnim brojevima i matematičkoj konstanti i.

Jedan od prvih matematičara koji je mogao biti zaslužan za otkriće imaginarnih brojeva, iako to nije, bio je starogrčki matematičar Heron iz Aleksandrije[1]. Njegovu povezanost s imaginarnim brojevima nalazimo u njegovom djelu *Stereometrica*. Još u 1. stoljeću nove ere koristeći formulu za volumen krnje piramide s kvadratima kao bazama, Heron je računajući visinu piramide za određene vrijednosti elemenata krnje piramide odbacio mogućnost negativnog broja ispod kvadratnog korijena. Znanstvenici tvrde kako je u računu um-

Vedran Levanić, student, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, `vekiyyy@gmail.com`

[1] Heron iz Aleksandrije (1. st. n. e.) – starogrčki matematičar i inženjer; poznat po formuli za površinu trokuta $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ i metodi izračunavanja aproksimativne vrijednosti kvadratnog korijena nekog pozitivnog racionalnog broja.

jesto $\sqrt{81-144}=\sqrt{-63}$ Heron prikazao to kao $\sqrt{144-81}=\sqrt{63}$. Uzrok tome možemo potražiti u činjenici kako se u to vrijeme nisu poznavali niti negativni brojevi, a kamoli kompleksni. Prihvaćali su se samo pozitivni brojevi.

Matematičar koji se također susreo s imaginarnim brojevima bio je Scipione del Ferro[2] u doba renesanse. Bilo je to za matematiku doba prožeto rješavanjem kubnih jednadžbi i jednadžbi višeg stupnja. On je smatrao da su imaginarni brojevi (korijeni negativnih brojeva) kao rješenja jednadžbi neprihvatljiva rješenja, tj. da je u tom smislu rješenje "nemoguće". Neposredno nakon njega, baveći se istim problemom, prvi matematičar koji je prihvatio imaginarne brojeve u svojim računima i koristio se njima kao pomoćnim korakom ne znajući što oni točno predstavljaju, bio je talijanski matematičar Girolamo Cardano (1501. – 1576.). Na primjeru jednadžbe $x^3=15x+4$ rješavajući Cardano-Tartagliinom metodom kao rješenje dobivamo

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}},$$

gdje u tom prikazu imamo prvu povijesnu pojavu kompleksnih brojeva. Time je Cardano otvorio put prema shvaćanju imaginarnih brojeva, a samim time kompleksnih brojeva. Prvi koji je opravdao korištenje kvadratnih korijena iz negativnih brojeva u Cardano-Tartagliinoj metodi rješavanja kubne jednadžbe bio je još jedan talijanski matematičar, Rafael Bombelli (1526. – 1572.). Svoje ideje iznio je u djelu *Algebra*, u kojemu je opisao i pravila računa s njima, tj. kako se zbrajaju, oduzimaju i množe te tako prvi otkrio da je $\pm\sqrt{-1}\cdot\pm\sqrt{-1}=-1$. Time je postao prva osoba u povijesti koja je kompleksne brojeve prihvatila kao smislene. Također je uočio i vezu međusobno kompleksno konjugiranih brojeva $a+bi$ i $a-bi$. Njegove ideje bile su velik doprinos usponu kompleksnih brojeva u svijetu matematike.

Osim o René Descartesu i Johnu Wallisu u 17. stoljeću, čije ćemo ideje geometrijskog predočavanja pojedinačno razmotriti kasnije, važno je spomenuti i doprinos jednog od najvećih i najproduktivnijih matematičara u povijesti. Leonhard Euler[3] prvi uvodi oznaku i za $\pm\sqrt{-1}$, 1777. godine. Također, u svom djelu *Algebra*, pojam *imaginaran* povezuje u matematičkom kontekstu s kvadratnim korijenom negativnog broja i to u sljedećem citatu koji dajemo u engleskom prijevodu:

"*All such expressions as* $\sqrt{-1},\sqrt{-2}\ldots$ *are consequently impossible or imaginary numbers, for we may assert that they are neither nothing, not greater than nothing, nor less than nothing, which necessarily renders them imaginary or impossible.*"

odnosno, u slobodnom hrvatskom prijevodu:

"*Svi takvi izrazi, poput* $\sqrt{-1},\sqrt{-2}\ldots$*, stoga su nemogući ili imaginarni brojevi jer možemo tvrditi da nisu nula, niti su veći od nule, niti su manji od nule, što ih nužno određuje kao imaginarne ili nemoguće.*"

Prije koncentriranja na temu iz naslova, spomenimo još i Carla Friedricha Gaussa, velikog njemačkog matematičara koji je u 19. stoljeću doprinio širenju ideje kompleksnih brojeva svojim radovima. Brojevi oblika $a+bi$, gdje su a i b cijeli brojevi nazivaju se Gaussovim brojevima, a Gauss te Švicarac Jean Argand i Norvežanin Caspar Wessel na prijelazu 18. u 19. stoljeće osmislili su i geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva, danas uobičajenu kompleksnu ravninu.

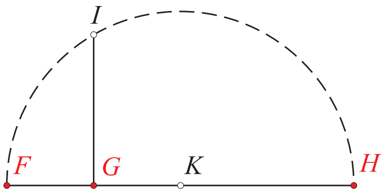
Descartesovo geometrijsko shvaćanje imaginarnog broja

Kao što smo već ranije napomenuli, prve pokušaje razumijevanja geometrijskog značaja imaginarnog broja možemo pronaći kod Renéa Descartesa (1596. – 1650.). Francuski fizičar i matematičar, smatra se utemeljiteljem analitičke geometrije. On je zaslužan za otkriće Kartezijeva koordinatnog sustava koji nosi naziv upravo po latinskoj inačici njegova imena (*Cartesius*). Smatra se i prvim modernim filozofom uz poznatu tvrdnju "*Mislim, dakle jesam.*"

[2] Scipione del Ferro (1465. – 1526.) – talijanski matematičar; prvi dao metodu za rješavanje jednadžbi tipa $x^3+ax=b$.

[3] Leonhard Euler (1707. – 1783.) – švicarski matematičar, fizičar i astronom; prvi postavio pojam funkcije kao temeljni matematički pojam, uveo oznake $f(x)$, e za bazu prirodnog logaritma i Eulerova broja, $\sum$ za zbrajanje; pronašao formulu $e^{i\pi}+1=0$ koja sadrži pet najvažnijih matematičkih konstanti.

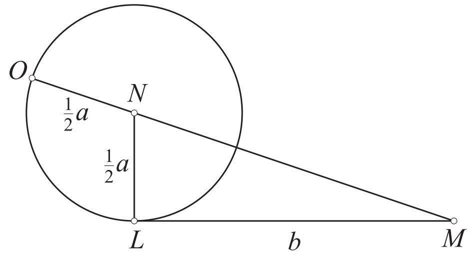
Matematičari u 16. i 17. stoljeću bili su još usko vezani uz tradicionalnu grčku geometriju te su se osjećali neugodno s pojmovima kojima nisu mogli dati geometrijski smisao. Takve "negativne osjećaje" prema imaginarnim brojevima imao je i Descartes, dok o kvadratnom korijenu pozitivnih brojeva nije tako mislio, jer je ustvari bilo opće poznato da se njihova geometrijska konstrukcija može lako prikazati. Prikaz takve konstrukcije Descartes je iznio u *La Geometrie*[4]. U tom prilogu je, bez davanja računskog dokaza, prikazao korake i crtež klasične euklidske konstrukcije dužine čija je duljina jednaka kvadratnom korijenu duljine zadane dužine. Taj crtež konstrukcije vidi se na slici 1. Za zadanu dužinu $\overline{GH}$, gdje je $\overline{FG}$ jedinična dužina duljine 1 i K polovište dužine $\overline{FH}$, tražena dužina je $\overline{IG}$, tj. $|IG| = \sqrt{|GH|}$.



Slika 1. Konstrukcija kvadratnog korijena zadane dužine

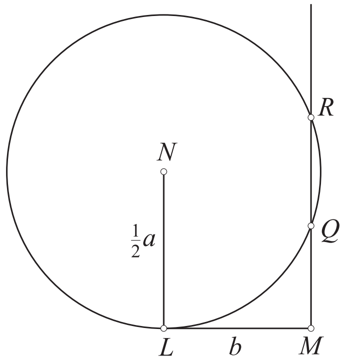
Descartes je razlog svoje tvrdnje ostavio na maštu svojim čitateljima. Tvrdnja lagano slijedi iz sličnosti trokuta IFG i HIG.

Nasuprot maloprije navedenoj konstrukciji, za Descartesa je kvadratni korijen negativnog broja, s obzirom na njegova razmišljanja, značio nemogućnost geometrijske konstrukcije, tj. da je takav broj ili dužinu nemoguće konstruirati. To mišljenje iznjedrilo se kada je rješavao određene kvadratne jednadžbe. Najprije je započeo promatrajući jednadžbu $z^2 = az + b^2$, gdje su a i b pozitivni brojevi koji označavaju duljine zadanih dužina. Posebno, pretpostavimo da je $|LM| = b$, $|LN| = \frac{1}{2}a$ i dužina $\overline{LN}$ okomita na dužinu $\overline{LM}$. U sljedećim koracima konstrukcije konstruira se kružnica sa središtem u točki N polumjera $\frac{1}{2}a$ i pravac NM tako da siječe kružnicu u točki O kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2. Descartesova geometrijska konstrukcija pozitivnog korijena iz $z^2 = az + b^2$

Tako je Descartes geometrijski konstruirao samo jedno rješenje koje je, algebarski zapisano, dano sa $|OM| = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}$, dok je ignorirao $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}$ jer je ovaj potonji (negativni) korijen smatrao i nazivao *lažnim* korijenom. No, u toj jednadžbi nema imaginarnih brojeva, zbog pozitivnih vrijednosti a i b^2, kao što se pojavljuju u idućoj promatranoj kvadratnoj jednadžbi, $z^2 = az - b^2$. Kao i u prošloj konstrukciji, započeo je s dužinama $\overline{LM}$ i $\overline{LN}$, čije su duljine redom b i $\frac{1}{2}a$, tako da su one međusobno okomite i kružnicom polumjera $\frac{1}{2}a$ sa središtem u točki N. Zatim je, umjesto pravca MN kao kod prve jednadžbe, konstruirao okomicu iz točke M na dužinu $\overline{LM}$. Sjecištem okomice i kružnice dobivene su točke Q i R kao što se vidi na slici 3.



Slika 3. Descartesova konstrukcija pozitivnih korijena iz jednadžbe $z^2 = az - b^2$

[4] *La Geometrie* – prilog njegove knjige *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* iz 1637. godine kojom je doprinio razvoju analitičke geometrije.

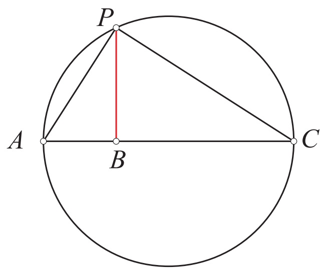
Ako ta sjecišta postoje, ovisno o zadanim pozitivnim veličinama a i b^2, Descartes je izjavio kako su upravo duljine dužina $\overline{MQ}$ i $\overline{MR}$ tražena rješenja, tj. korijeni $z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ promatrane jednadžbe. On je iz svega toga zaključio da ako kružnica ne siječe ili ne dodiruje okomicu iz točke M, tada jednadžba nema rješenja, tj. traženih korijena te je konstrukcija tog problema nemoguća. Zapravo, ono što je trebao zaključiti jest da tada nema realnih korijena: uočimo kako uz uvjet $b > \frac{1}{2}a$ algebarski dobivamo baš kompleksne korijene. Također, uz već navedene, promatrao je i jednadžbu $z^2 + az = b^2$ kod koje je isto prisutan barem jedan pozitivan korijen. Zanimljivo je da je (kao i raniji matematičari) u potpunosti ignorirao slučaj jednadžbe $z^2 + az + b^2 = 0$ jer nema pozitivnih korijena ako su a i b^2 oboje pozitivni, a oni su mu jedini predstavljali geometrijski značaj.

Zaključujemo kako kroz svoj rad Descartes nije previše pridonio razumijevanju imaginarnih brojeva jer ih sam nije prihvaćao i nije ih mogao geometrijski interpretirati. Kada im je, kao prvi matematičar, pridodao pridjev *imaginaran*, zapravo ih je opisivao njemu pogrdnim nazivom.

Wallisova geometrijska interpretacija imaginarnog broja

John Wallis (1616. – 1703.) bio je nadareni engleski matematičar, profesor geometrije na Sveučilištu u Oxfordu i član te predsjednik poznate grupe znanstvenika u to doba – *Royal Society*. Bavio se kriptografijom, teologijom i filozofijom. Svojim radom utjecao je na tada mladog Isaaca Newtona. Od mnoštva matematičkih ideja, spomenimo kako je uveo oznaku ∞ za beskonačnost i jedan beskonačan prikaz broja π: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$. Neposredni je prethodnik utemeljenja infinitezimalnog računa.

U svome djelu *Algebra* iz 1685. godine dao je formalnu i sustavnu analizu imaginarnih brojeva. Postoje dokazi kako je godinama prije toga bio nesiguran i skeptičan po pitanju odnosa algebarske i geometrijske interpretacije imaginarnog broja. Ipak, bio je uvjeren da njihova geometrijska interpretacija postoji. To uvjerenje pokušao je pokazati preko ideje geometrijske interpretacije negativnog broja koju je objasnio u *Algebri*. Na pravcu na kojem je označena neka nulta točka, pozitivan broj je za njega bila udaljenost izmjerena od te nulte točke udesno, dok je negativan broj udaljenost izmjerena od nulte točke ulijevo. Uz tu ideju, pažnju je skrenuo i na konstrukciju srednje geometrijske proporcionale dviju zadanih dužina, s obzirom na proučeni Descartesov rad. Kao što je prikazano na slici 4, za zadane dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, Wallis je točku A odredio kao nultu točku i zatim konstruirao dužinu $\overline{AC}$ s označenom točkom B na njoj. Nakon toga je konstruirao kružnicu čiji je promjer baš dužina $\overline{AC}$. Podigavši okomicu iz točke B na AC, dobio je točku P kao sjecište te okomice s konstruiranom kružnicom. Time je duljina dužine $\overline{BP}$ tražena srednja geometrijska proporcionala, tj. vrijedi $|BP| = \sqrt{|AB| \cdot |BC|}$.

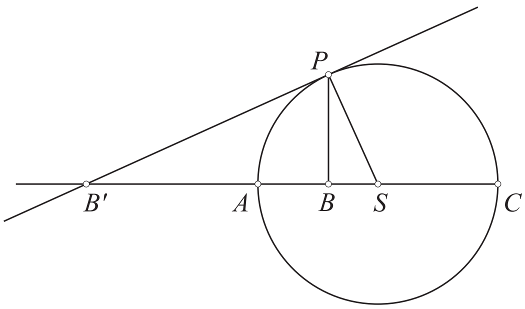


Slika 4. Wallisova konstrukcija srednje geometrijske proporcionale

Uočimo kako obje dužine u ovom slučaju imaju pozitivnu vrijednost po njegovoj opisanoj interpretaciji pozitivnih i negativnih brojeva. Sljedeći korak u ideji bila je modifikacija prethodne konstrukcije na konstrukciju srednje geometrijske proporcionale[5] dviju zadanih dužina od kojih jedna od njih ima negativnu vrijednost. Kao što se vidi na slici 5, Wallis je u tom slučaju ponovio konstrukciju iz prethodnog problema te u točki P konstruirao tangentu na kružnicu, koja je okomita na polumjer $\overline{PR}$ kružnice i

[5] Srednja geometrijska proporcionala dvije istovrsne veličine a i b je drugi korijen njihova umnoška, odnosno njima istovrsna veličina x sa svojstvom $a : x = x : b$.

koja u točki B' siječe produžetak dužine $\overline{AC}$ s lijeve strane točke A.



Slika 5. Wallisova konstrukcija srednje geometrijske proporcionale $|B'P| = \sqrt{|AB'| \cdot |B'C|}$

Tako su sada zadane dužine $\overline{AB'}$ i $\overline{B'C}$, a traženu srednju geometrijsku proporcionalu nam daje dužina $\overline{B'P}$. Osim toga, uočimo kako se točka B' nalazi lijevo od A i točka C desno od B'. Time je Wallis ističući važnost smjera dobio negativan broj pod kvadratnim korijenom jer je $|B'C| > 0$, a $|AB'| < 0$. Pokažimo da dobivena jednakost uistinu vrijedi. Po samoj konstrukciji uočimo kako je PSB' pravokutan trokut. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo sljedeću jednakost:

$$|B'P|^2 + |SP|^2 = |B'S|^2. \qquad (1)$$

Kako je SP polumjer, za njega vrijedi $|SP| = \frac{1}{2}|AC|$. Kako vrijedi $|AC| = |B'C| - |B'A|$, možemo zapisati:

$$|SP| = \frac{1}{2}(|B'C| - |B'A|). \qquad (2)$$

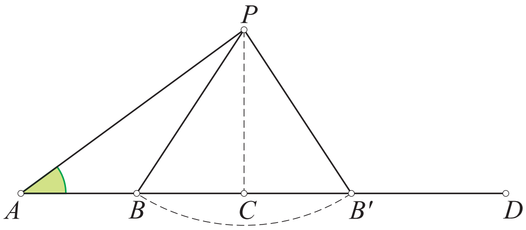
Također, kako je $|B'S| = |B'A| + |AS|$, a $|AS| = |SP| = \frac{1}{2}(|B'C| - |B'A|)$, zapravo dobivamo:

$$|B'S| = \frac{1}{2}(|B'C| + |B'A|). \qquad (3)$$

Uvrstivši desne strane jednakosti od (2) i (3) u (1), a zatim kvadrirajući i krateći jednake članove te ostavivši $|B'P|^2$ na jednoj strani jednakosti, dobivamo $|B'P|^2 = |B'C| \cdot |B'A|$, tj. $|B'P| = \sqrt{|B'C| \cdot |B'A|}$, što je upravo jednako i Wallisovoj konstataciji ako uvedemo važnost smjera.

Kako je to bio sam početak u pokušaju shvaćanja geometrijske interpretacije imaginarnog broja, Wallis nije bio posebno zadovoljan dobivenim. Zato je tom problemu pristupio na drukčiji način kroz rješavanje problema konstrukcije trokuta kojemu su zadane njegove dvije stranice i kut koji se ne nalazi između tih stranica.

Kao što se vidi na slici 6, postoje dva moguća rješenja, trokuti APB i APB'. To je slučaj ako je $|PB| = |PB'| > |PC|$. Na toj slici, početne zadane stranice su $\overline{AP}$ i $\overline{PB} (= \overline{PB'})$ te zadani kut PAD. Time je odmah određena i visina trokuta, $\overline{PC}$.



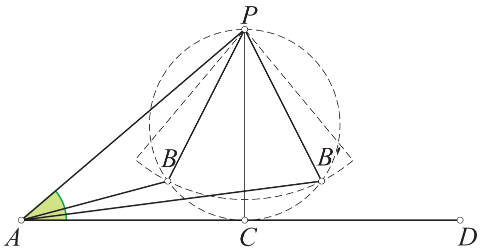
Slika 6. Wallisova konstrukcija trokuta kojemu su zadane dvije stranice i kut koji se ne nalazi između njih

S pomoću gornje slike promotrimo što nam to donosi u algebarskom zapisu. Kako je $|BC| = |CB'|$ i $|PB| = |PB'|$, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} |AB| &= |AC| - |BC| \\ &= \sqrt{|AP|^2 - |PC|^2} - \sqrt{|PB|^2 - |PC|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AB'| &= |AC| + |CB'| \\ &= \sqrt{|AP|^2 - |PC|^2} + \sqrt{|PB'|^2 - |PC|^2}. \end{aligned}$$

Kao što smo napomenuli, ako je $|PB| = |PB'| > |PC|$, tada imamo dva rješenja. No ako je $|PB| = |PB'| < |PC|$, tada nema rješenja želimo li da se točke B i B' nalaze na AD. Taj uvjet nam zapravo prikazuje da pod drugim korijenima gornjih jednakosti dobivamo negativne brojeve. Descartes bi to protumačio kako je konstrukcija takvog trokuta nemoguća. Kako dani podatci svejedno određuju postojanje točaka B i B', Wallis dopušta da se one nalaze i negdje drugdje osim na AD. Kao što je prikazano na slici 7, on je konstruirao kružnicu čiji je promjer duljine $|PC|$. Nakon toga je iz točke P povukao luk kružnice polumjera $|PB|$ tako da on siječe prvu konstruiranu kružnicu u točkama B i B'.



Slika 7. Konstrukcija trokuta – 2.slučaj

Wallis je komentirao kako su i u ovom slučaju trokuti APB i APB' rješenja s obzirom na početne zadane elemente, duljine stranica i mjere kuta. Uočimo kako se taj kut ne nalazi u traženim trokutima. No Wallis je smatrao kako se taj uvjet ne traži u samom rješenju kako mi danas shvaćamo zadatak, već se s pomoću njega dobije rješenje. Kako se točke B i B' nalaze iznad AD, slobodno možemo reći kako je Wallis zapravo naišao na ideju vertikalnog pomaka kao geometrijske manifestacije imaginarnih brojeva u ravnini kakvu danas koristimo kada označavamo kompleksne brojeve u koordinatnoj, odnosno kompleksnoj ravnini.

Zaključak

Kao što smo naveli, imaginarni su brojevi pobudili maštu i nove ideje mnogih matematičara. Opisani prvi pokušaji René Descartesa i Johna Wallisa u geometrijskom shvaćanju imaginarnog broja definitivno su pridonijeli rastu istraživanja na tom području kroz iduća stoljeća. U današnje vrijeme, imaginarni brojevi su svoju primjenu, osim u teoriji kompleksne analize, pronašli i u elektromagnetizmu, kartografiji, analizi vibracija, procesiranju signala, mehanici i dinamici fluida, kvantnoj mehanici i mnogim drugim područjima današnje moderne tehnologije. Oni su važan dio matematike koji se uči u 2. razredu srednje škole pa je svaki povijesni pokušaj njihovog shvaćanja od značaja i za današnju nastavu matematike.

LITERATURA

1/ F. M. Brückler (2014.): *Povijest matematike I*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku.

2/ F. M. Brückler (2010.): *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku.

3/ B. Kovačić i T. Strmečki: *Matematičke konstante – 1.dio*.

4/ J. Matejaš i M. Pezer: *Brojevi* π, e, i *kroz povijest*.

5/ Paul J. Nahin (2010.): *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton Universety Press.

6/ Imaginary and complex numbers: `http://www.ukessays.com/essays/mathematics/imaginary-and-complex-numbers.php` (datum posjete: 5.6.2015.).

7/ Imaginarni broj: `http://hr.wikipedia.org/wiki/Imaginarni_broj` (datum posjete: 5.6.2015.).

8/ Kartezijev koordinatni sustav: `http://hr.wikipedia.org/wiki/Kartezijev_koordinatni_sustav` (datum posjete: 6.6.2015.).

9/ René Descartes: `http://hr.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes` (datum posjete: 6.6.2015.).