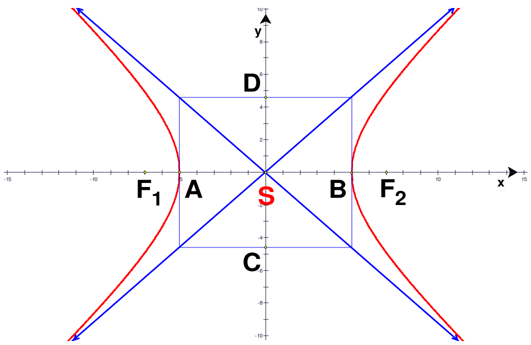
HIPERBOLA (m©h)

hiperbola



hiperbola je skup svih točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dvije zadane (fiksne) točke te ravnine stalna (konstantna)

središte hiperbole S(0, 0)

žarišta ili fokusi: $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$

vrhovi ili tjemena: A(– a, 0), B(a, 0)

realna ili glavna os hiperbole: $|AB| = 2a$

imaginarna os hiperbole: $|CD| = 2b$, C(0, – b), D(0, b)

realna poluos hiperbole: $|AS| = |SB| = a$

imaginarna poluos hiperbole: $|CS| = |SD| = b$

linearni ekscentricitet hiperbole: $|F_1S| = |SF_2| = e$, $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2+b^2}$

numerički ekscentricitet hiperbole: $\varepsilon = \dfrac{e}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, $e > a \Rightarrow \varepsilon > 1$

parametar hiperbole

tetiva hiperbole koja prolazi fokusom i okomita je na realnu os

duljina parametra: $2p = \dfrac{2 \cdot b^2}{a}$, poluparametar: $p = \dfrac{b^2}{a}$

osna (kanonska) jednadžba hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$$

www.halapa.com

vršna jednadžba hiperbole

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$

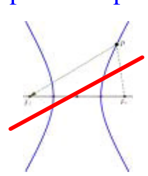
parametarska jednadžba hiperbole

$$x = a \cdot \mathrm{ch}\, t \;,\quad y = b \cdot \mathrm{sh}\, t \quad \text{ili} \quad x = a \cdot \frac{1}{\cos t} \;,\quad y = b \cdot tg\, t \;,\quad t - \text{parametar}$$

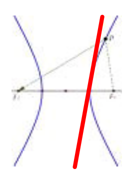
jednadžba hiperbole sa središtem S(p, q), a osi 2a i 2b paralelne su s koordinatnim osima

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

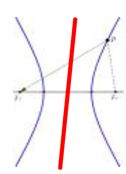
međusobni položaj hiperbole i pravca



pravac je sekanta hiperbole



pravac je tangenta hiperbole



pravac ne siječe hiperbolu

presjek pravca i hiperbole

traže se njihove zajedničke točke (ako postoje)

treba riješiti sustav jednadžbi

$$\left.\begin{array}{r} y = kx + l \\ b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{uvrstimo y iz prve} \\ \text{u drugu jednadžbu} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{nakon sređivanja dobijemo} \\ \text{kvadratnu jednadžbu} \end{array}\right):$$

- ako jednadžba ima dva realna rješenja, onda pravac siječe hiperbolu u dvije točke
- ako jednadžba ima dvostruko realno rješenje, onda je pravac tangenta
- ako jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja, onda se pravac i hiperbola ne sijeku

uvjet dodira pravca y = k · x + l i hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$

$$a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2$$

koordinate dirališta

$$D\left(-\frac{k \cdot a^2}{l},\ -\frac{b^2}{l}\right)$$

uvjet dodira pravca Ax + By + C = 0 i hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$

$$A^2 \cdot a^2 - B^2 \cdot b^2 = C^2$$

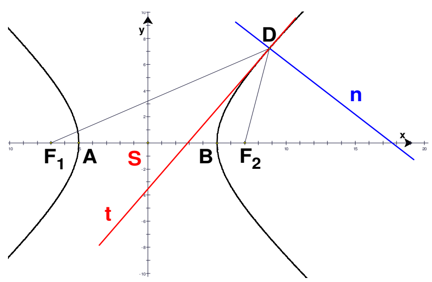
jednadžba tangente u točki $T(x_0, y_0)$ hiperbole

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad b^2 \cdot x_0 \cdot x - a^2 \cdot y_0 \cdot y = a^2 \cdot b^2$$

jednadžba normale u točki $T(x_0, y_0)$ hiperbole

$$y - y_0 = -\frac{a^2 \cdot y_0}{b^2 \cdot x_0} \cdot (x - x_0)$$

simetričnost
- hiperbola ima dvije osi simetrije
- hiperbola ima jedno središte simetrije



tangenta i normala na hiperbolu simetrale su unutarnjeg i vanjskog kuta među radijus–vektorima dirališta:

$\overrightarrow{F_1D}$ i $\overrightarrow{F_2D}$

www.halapa.com

asimptote
- pravci koji dodiruju hiperbolu u beskonačnosti
- pravci kojima se grane hiperbole neograničeno približavaju pri udaljavanju u beskonačnost

jednadžbe asimptota

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

jednakostranična hiperbola

žarišta ili fokusi: $F_1\left(-a \cdot \sqrt{2}, 0\right)$, $F_2\left(a \cdot \sqrt{2}, 0\right)$, vrhovi ili tjemena: A(– a, 0), B(a, 0)

asimptote: y = – x, y = x

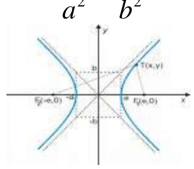
jednadžbe jednakostranične hiperbole

$$a = b \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

žarišta i koordinatne osi

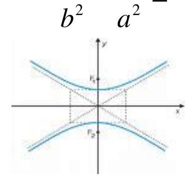
ako su žarišta F_1 i F_2 na x-osi jednadžba hiperbole je:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



ako su žarišta F_1 i F_2 na y-osi jednadžba hiperbole je:

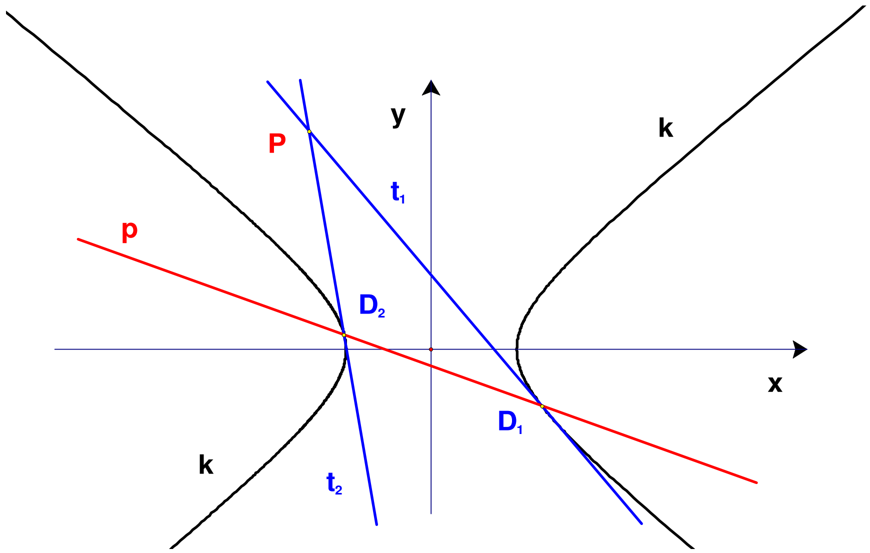
$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$$



Jednadžba hiperbole kojoj su osi paralelne s koordinatnim osima, a koordinate središta su S(p, q)

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

pol i polara hiperbole



Polara je spojnica dirališta D_1 i D_2 tangenata povučenih iz točke P na hiperbolu k.
Pravac p je polara točke P s obzirom na hiperbolu k.
Točka P je pol pravca p (polare) s obzirom na hiperbolu k.
Jednadžba polare točke P s obzirom na hiperbolu k glasi:

- $$\left.\begin{array}{l} b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \\ P(x_0,\ y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow b^2\cdot x_0\cdot x-a^2\cdot y_0\cdot y=a^2\cdot b^2$$
- $$\left.\begin{array}{l} b^2\cdot(x-p)^2-a^2\cdot(y-q)^2=a^2\cdot b^2 \\ P(x_0,\ y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow b^2\cdot(x_0-p)\cdot(x-p)-a^2\cdot(y_0-q)\cdot(y-q)=a^2\cdot b^2$$

www.halapa.com