HARMONIJSKA SREDINA

Mladen Halapa, *Bjelovar*

Dosad se u MATKI (br. 7) moglo čitati o aritmetičkoj i geometrijskoj sredini dvaju brojeva. U ovom ćemo članku upoznati jednu treću sredinu, tzv. harmonijsku sredinu dvaju brojeva i usporedit je s aritmetičkom i geometrijskom sredinom. Harmonijsku sredinu poznavali su još pitagorejci (6. st. prije Krista). Prema legendi, Pitagora je jednom šećući zastao pred kovačnicom i ostao zadivljen "glazbom" koja je nastala udaranjem četiriju čekića i divnim susvučjem. Navodno je to suzvučje sveo na omjere težine čekića. To je samo priča, međutim, istina je da su pitagorejci eksperimentirali na monokordu (jednožičano glazbalo). Ispitivanjem veze između ugodnih suzvučja i duljina žice došli su do pojma harmonijske sredine. Više o tome bit će govora u jednom od sljedećih brojeva MATKE. Oni su harmonijsku sredinu H(x, y) dvaju brojeva x > 0, y > 0 definirali formulom

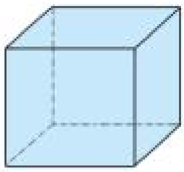
$$H(x,y)=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}. \tag{1}$$

Nakon toga, uočili su da se harmonijska sredina na prirodan način pojavljuje i u pravilnih poliedara, pa je to još više potvrdilo njezinu važnost. Pogledajmo pobliže o čemu se tu radi. Pravilnim poliedrom zovemo svaki konveksni poliedar kojemu su sve strane međusobno sukladni pravilni poligoni. Pravilni poliedri zovu se još i Platonova tijela. Još je Euklid znao da postoji svega pet tipova pravilnih poliedara. To su:

1. pravilni tetraedar (trostrana piramida kojoj su svi bridovi jednaki)

Slika 1

2. kocka



Slika 2

3. oktaedar

Slika 3

4. dodekaedar

Slika 4

5. ikosaedar.

Slika 5

Na slici 1 nacrtan je pravilni tetraedar, njegovi su bridovi dijagonale strana kocke. Na slici 3 nacrtan je oktaedar, njegovi su vrhovi središta strana kocke. Dodekaedar (slika 4) je poliedar omeđen s 12 pravilnih peterokuta, a ikosaedar (slika 5) je poliedar kojemu su vrhovi središta strana dodekaedra. Označimo s v broj vrhova, s b broj bridova i sa s broj strana pravilnog poliedra. Tad za pravilne poliedre imamo tablicu:

Tip poliedra	v	b	s	strane su
pravilni tetraedar	4	6	4	trokuti
kocka	8	12	6	kvadrati
oktaedar	6	12	8	trokuti
dodekaedar	20	30	12	peterokuti
ikosaedar	12	30	12	trokuti

Uzmimo za primjer kocku i nađimo harmonijsku sredinu broja bridova b = 12 i broja strana s = 6. Prema (1) nalazimo da je

$$H(12,6)=\frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}=8,$$

a to je upravo broj vrhova kocke. Dakle, broj vrhova kocke je harmonijska sredina broja njezinih bridova i strana.

U oktaedru je pak broj strana harmonijska sredina broja njegovih vrhova i broja bridova. Više o tome u zadatcima1., 2. i 3.

Harmonijska sredina pojavljuje se i u fizici. U znanosti o elektricitetu uči se: ako spojimo dva otpornika R_1 i R_2 paralelno, onda je ukupni otpor R jednak

$$R=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}},$$

tj. ukupni otpor R jednak je polovini harmonijske sredine otpora R_1 i R_2.

Nakon navedenih primjera vratimo se harmonijskoj sredini. Kao prvo, postavlja se pitanje u kakvoj je ona vezi s aritmetičkom i geometrijskom sredinom. Pokazat ćemo da za brojeve $x > 0$, $y > 0$ vrijedi

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\sqrt{x\cdot y}, \qquad (2)$$

tj. harmonijska sredina dvaju brojeva uvijek je manja ili jednaka od njihove geometrijske sredine, a one su jednake ako i samo ako su ti brojevi jednaki, tj. $x = y$.

Kako bismo to dokazali pođimo od očigledne nejednakosti

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0.$$

U njoj znak jednakosti vrijedi samo ako je $x = y$. Kvadriranjem iz nje slijedi

$$x-2\sqrt{xy}+y\geq 0,$$

odnosno

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}.$$

Pomnožimo li ovu nejednakost s $\sqrt{xy}\geq 0$ dobivamo

$$\sqrt{xy}\left(x+y\right)\geq 2xy,$$

tj.

$$\sqrt{xy}\geq\frac{2xy}{x+y}.$$

Podijelimo li napokon brojnik i nazivnik desne strane s xy slijedi

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},$$

a to je upravo nejednakost (2), samo drukčije zapisana. Ovime je tvrdnja dokazana.

Kako je geometrijska sredina uvijek manja od aritmetičke (vidi Matka br. 7), to konačno dobivamo

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}, \tag{3}$$

pri čemu znakovi jednakosti vrijede samo ako je $x = y$.

Primijetimo da se harmonijska sredina dvaju brojeva može napisati i u obliku

$$H(x,y) = \frac{2xy}{x+y},$$

što je neposredna posljedica formule (1).

Pokažimo sad na primjerima kako se koriste nejednakosti (2) i (3).

Primjer 1. Dokažite da za realne brojeve $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ vrijedi

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Rješenje. Primijenimo (3) na parove (a, b), (b, c) i (c, a). Dobivamo:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab},$$

$$\frac{2bc}{b+c} \leq \sqrt{bc},$$

$$\frac{2ca}{c+a} \leq \sqrt{ca}.$$

Množenjem ovih nejednakosti slijedi:

$$\frac{8a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \sqrt{a^2b^2c^2} = abc,$$

odakle je

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Primjer 2. Dokažite: ako su a, b, c duljine stranica trokuta i s njegov poluopseg, onda vrijedi

$$a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) < 3s^2.$$

Rješenje. Primijenimo nejednakost između harmonijske i aritmetičke sredine na parove (a, b + c), (b, c + a), (c, a + b). Zbog $b + c > a$, $c + a > b$, $a + b > c$ (nejednakost trokuta) dobivamo

$$\frac{2a(b+c)}{a+b+c} < \frac{a+b+c}{2},$$

$$\frac{2b(c+a)}{a+b+c} < \frac{a+b+c}{2},$$

$$\frac{2c(a+b)}{a+b+c} < \frac{a+b+c}{2}.$$

Odavde zbog $a + b + c = 2s$ slijedi

$$a(b + c) < s^2, \quad b(c + a) < s^2, \quad c(a + b) < s^2.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti slijedi:

$$a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) < 3s^2.$$

Za vježbu riješite sljedeće zadatke:

1. Pokažite da je u pravilnom tetraedru $v = H(b, s)$, $b = H(v, s)$, $s = H(v, b)$.
2. Dokažite da je u dodekaedru broj stranica jednak polovini harmonijske sredine broja vrhova i broja strana.
3. Kako glasi analogna tvrdnja za ikosaedar?
4. Za pravilne poliedre odredite brojeve $v - b + s$. Što opažate?
5. Ako automobil prvu polovinu puta vozi brzinom v_1, a drugu brzinom v_2, $v_1 \neq v_2$, onda je njegova srednja brzina v na tom putu jednaka $v = H(v_1, v_2)$. Dokažite.
6. Dokažite: ako su a, b, c duljine stranica trokuta i s njegov poluopseg, onda vrijedi

$$a(s-a)+b(s-b)+c(s-c) < \frac{3}{4}s^2.$$

7. Dokažite da za duljine stranica trokuta vrijedi

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < 3.$$

(Naputak: primijenite (2) na parove $\left(\frac{a}{b+c},\ 1\right)$, $\left(\frac{b}{c+a},\ 1\right)$, $\left(\frac{c}{a+b},\ 1\right)$.)

8. Dokažite da u svakom trokutu vrijedi $8 \cdot P^2 \leq s \cdot a \cdot b \cdot c$, pri čemu znak jednakosti vrijedi samo u slučaju jednakostraničnog trokuta.

(Naputak: primijenite (2) na parove $(s - a, s - b)$, $(s - b, s - c)$, $(s - c, s - a)$.)