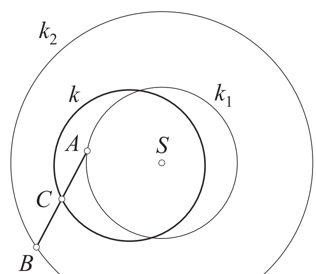
Određivanje geometrijskog mjesta točaka uz pomoć programa dinamičke geometrije

Ida Balković[1], *Maja Starčević*[2]

Određivanje skupa točaka koje zadovoljavaju neki geometrijski uvjet često je zahtjevan problem. Ukoliko ga ne određujemo analitičkim putem, tj. uvođenjem koordinatnog zapisa, korisno je naslutiti eksperimentiranjem o kojem se skupu konkretno radi te zatim pokušati precizno dokazati da je upravo taj skup rješenje. Pritom, ako je geometrijski uvjet dosta složen, prostoručno crtanje pojedinačnih slučajeva može biti veoma komplicirano, a slike nepregledne. U tome nam međutim mogu pomoći programi dinamičke geometrije u kojima je relativno jednostavno dobiti sliku traženog skupa, čak i u zahtjevnim zadacima. Na taj način možemo lakše postaviti ciljeve u problemu. Potrebno je za početak opisati skup koji je dobiven alatom lokus (npr. možemo odrediti o kojoj vrsti krivulje se radi, koji je njezin položaj ili karakteristična veličina). Sljedeći korak je dokazati matematički da se zadano geometrijsko mjesto točaka ($\mathcal{G}$) i dobiveni lokus ($\mathcal{L}$) podudaraju. Taj dio problema ne možemo riješiti jednostavno i tu nam program dinamičke geometrije ne može direktno pomoći. Međutim, pomoću programa možemo brzo mijenjati sliku u ovisnosti o zadanim objektima što nam pomaže uočiti zakonitosti koje vrijede i koje nam daju putokaz u rješavanju problema. Pritom se možemo služiti raznim alatima za mjerenje, možemo nalaziti mjesta presjeka objekata, ispitivati kolinearnost točaka i sl. Opcija skrivanja i ponovnog prikazivanja objekata, te mogućnost jednostavnog povećanja ili smanjenja slike pomažu nam da sliku održavamo preglednom. Problem i dalje ostaje dovoljno matematički zahtjevan, ali je i osjetno olakšan u usporedbi s rješavanjem bez pomoći računala.

Pogledat ćemo tri problema određivanja geometrijskog mjesta točaka. Vidjet ćemo da se u sva tri slučaja radi o kružnici ili njenom podskupu. Za početak promatramo jednostavniji problem kako bismo demonstrirali kako odrediti lokus i napraviti precizan matematički dokaz.

Problem 1. Zadane su dvije koncentrične kružnice k_1 i k_2 s radijusima r_1 i r_2 redom, pri čemu vrijedi $r_2 = 2r_1$. Na kružnici k_1 odabrana je fiksna točka A, dok je na kružnici k_2 odabrana proizvoljna točka B. Točka C je polovište dužine $\overline{AB}$. Odredite geometrijsko mjesto točaka C.



Slika 1.

Rješenje. U nekom od programa dinamičke geometrije (npr. Geometer's Sketchpadu ili Geogebri) konstruiramo kružnice k_1 i k_2, sa središtem u točki S, kao što je zadano. Točka B se slobodno giba po kružnici k_2 i kao takva predstavlja generator lokusa. Konstruiramo li točku C na način opisan u zadatku, dobili smo generirani objekt. Označimo li generator i generirani objekt, možemo primijeniti alat za određivanje lokusa. Primjećujemo da je dobiveni lokus $\mathcal{L}$ kružnica (slika 1), nazovimo ju k, kojoj lako konstruiramo i središte.

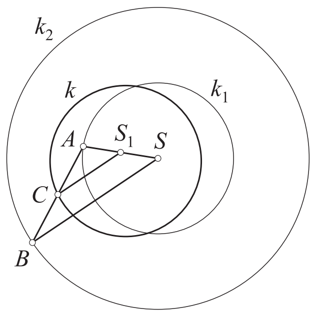
---

[1] Studentica diplomskog studija matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, e-pošta: `ida.balkovic@gmail.com`

[2] Docentica na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, e-pošta: `mstarcev@math.hr`

Mjerenjem uočavamo da se središte te kružnice S_1 nalazi u polovištu dužine $\overline{AS}$ te da joj je radijus jednak r_1.

Sada slijedi precizan dokaz da je traženo geometrijsko mjesto $\mathcal{G} = \mathcal{L}$. Znamo da je točka C polovište dužine $\overline{AB}$. Dužina $\overline{CS_1}$ je stoga srednjica trokuta ABS (slika 2) i vrijedi $|CS_1| = \dfrac{1}{2}|BS| = r_1$. Time smo dokazali da se točka C nalazi na kružnici sa središtem u S_1 i radijusa r_1.



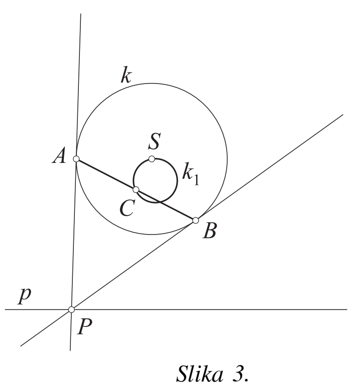
Slika 2.

Time nismo pokazali da se traženo geometrijsko mjesto u potpunosti podudara s kružnicom k, već da vrijedi $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$. Međutim, ukoliko imamo točku C na kružnici k, neka je točka B presjek kružnice k_2 i pravca koji prolazi kroz S i paralelan je pravcu CS_1 (i pritom su vektori $\overrightarrow{S_1C}$ i $\overrightarrow{SB}$ jednako orijentirani). Neka je točka C' presjek pravaca AB i CS_1. Tada je $\overline{C'S_1}$ srednjica $\triangle ABS$, odnosno $|C'S_1| = \dfrac{1}{2}|BS| = r_1$. Međutim to povlači da se točke C i C' podudaraju, odnosno C je polovište dužine $\overline{AB}$. Time smo dokazali da je i $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$, odnosno konačno imamo $\mathcal{L} = \mathcal{G}$.

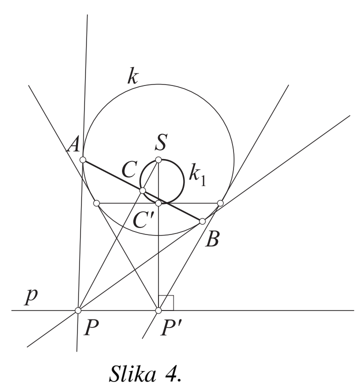
I u sljedeća dva zadatka dokaz provodimo na prethodno opisan način, ali zadaci iziskuju nešto više eksperimentiranja.

Problem 2. Zadana je kružnica k sa središtem S i radijusa r, te pravac p koji ju ne siječe. Na pravcu p je zadana proizvoljna točka P i iz nje su povučene dvije tangente na kružnicu k tako da ju dodiruju redom u točkama A i B. Točka C je polovište dužine $\overline{AB}$. Treba odrediti geometrijsko mjesto točaka C.

Rješenje. Kada konstruiramo sliku pomoću alata za lokus, dobivamo da je lokus $\mathcal{L}$ kružnica (slika 3). Označimo ju s k_1. Bitno je primijetiti da ta kružnica prolazi središtem kružnice k. Međutim, ukoliko se prisjetimo postavki problema, zaključujemo da $\mathcal{L}$ ne može biti cijela kružnica k_1. Naime, S predstavlja granični položaj točke C, kad se dirališta A i B sve više približavaju krajnjim točkama promjera kružnice k_1 koji je okomit na p (ali ih nikad ne dostižu). S obzirom da smo već imali ucrtano središte S kružnice, ukoliko samo očitavamo sliku, možemo steći krivi dojam o rješenju zadatka. Naš cilj je dakle dokazati da je $\mathcal{G}$ jednak skupu $\mathcal{L} = k_1 \backslash \{S\}$.



Slika 3.



Slika 4.

Da bismo preciznije opisali kružnicu k_1 i proveli precizan matematički dokaz, pomaže nam činjenica koju dobivamo pomicanjem točke P. Primjećujemo da dužina $\overline{AB}$, neovisno o položaju točke P, uvijek prolazi kroz istu točku, koju nazovimo C' (slika 4). Ona odgovara geometrijskom mjestu točke C kada je točka P jednaka točki P' koja je nožište okomice iz središta S na pravac p.

Pretpostavimo da smo dokazali da točka C' uvijek pripada dužini $\overline{AB}$. Kako je trokut SAB jednakokračan, dužina $\overline{SC}$ je njegova visina, odnosno kut $\sphericalangle C'CS$ je pravi. Dakle, prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice, točka C se mora nalaziti na kružnici s promjerom $\overline{SC'}$. Potrebno je još dokazati tvrdnju da točka C' uistinu uvijek pripada dužini $\overline{AB}$. Označimo presjek pravaca $P'S$ i AB s R.

Kako su trokuti SCR i $SP'P$ slični (prema KK teoremu o sličnosti trokuta), slijedi

$$\frac{|CS|}{|RS|} = \frac{|SP'|}{|SP|}.$$

S druge strane, trokuti PSA i ASC su također slični pa analogno imamo jednakost omjera

$$\frac{|CS|}{|SA|} = \frac{|SA|}{|SP|}.$$

Iz prethodne dvije jednakosti dobivamo

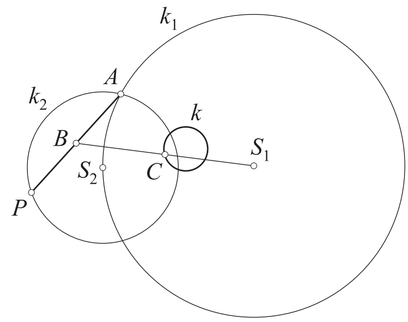
$$|RS| = \frac{|CS| \cdot |SP|}{|SP'|} = \frac{|SA|^2}{|SP'|}.$$

Kako su obje veličine $|SA|$ i $|SP'|$ neovisne o položaju točke P, slijedi da ni duljina $|RS|$ ne ovisi o položaju točke P, odnosno točka R je uvijek jednaka točki C'. Time smo dokazali da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$.

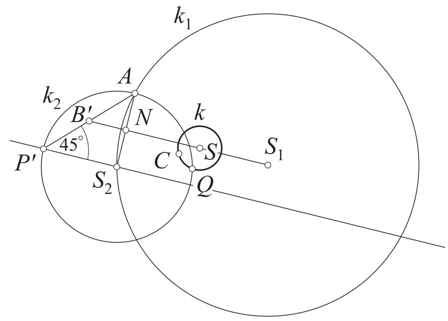
Obratno, neka je $C \in \mathcal{L}$ te neka je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k koja prolazi kroz točku C i otprije definiranu točku C'. Neka je točka P sjecište pravaca SC i p. Iz sličnosti trokuta $CC'S$ i $P'PS$ dobivamo kao i prije da je $|SC||SP| = |SC'||SP'|$. Iz definicije točke C' znamo da je $|SC'||SP'| = r^2$. Neka tangente iz P na kružnicu k dodiruju kružnicu u točkama A' i B' i neka je N polovište dužine $\overline{A'B'}$. Tada iz sličnosti trokuta $A'PS$ i $NA'S$ dobivamo $|SN||SP| = |SA'|^2 = r^2$. Kako točke C i N dijele dužinu $\overline{SP}$ u istom omjeru, C i N se podudaraju te je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$.

Problem 3. Zadane su dvije kružnice k_1 i k_2 pri čemu je radijus kružnice k_2 dvostruko manji od radijusa kružnice k_1. Središte kružnice k_1 označimo sa S_1, a središte kružnice k_2 sa S_2. Neka se S_2 nalazi na kružnici S_1 i neka je radijus kružnice k_2 jednak r. Neka je točka A jedno od sjecišta kružnica k_1 i k_2. Na kružnici k_2 odaberimo proizvoljnu točku P, različitu od A. Polovište dužine $\overline{AP}$ označimo s B, dok polovište dužine $\overline{BS_1}$ označimo s C. Treba odrediti geometrijsko mjesto točaka C.

Rješenje. Kada konstruiramo sliku u programu dinamičke geometrije, opet uočavamo kao rezultat kružnicu (slika 5). Nazovimo ju k. Pomicanjem točke P po kružnici k_2 primjećujemo da ako je $\overline{PA}$ promjer kružnice k_2, onda je pripadna slika jedno od sjecišta kružnica k_2 i k. Tu točku presjeka nazovimo Q. Iz postavki problema vidimo da je ta točka polovište dužine $\overline{S_1S_2}$. Korisno je odrediti i središte te kružnice. Možemo ga odrediti kao sjecište simetrala dviju neparalelnih tetiva. Označimo ga s S. Nadalje, zanimljivo je proučiti što se zbiva kad dužina $\overline{BS_1}$ prolazi središtem S. Naslućujemo da je u tom trenutku pravac PS_2 paralelan pravcu BS_1 te da je kut S_2PA možda jednak $45°$, što možemo provjeriti za početak alatom za mjerenje.



Slika 5.



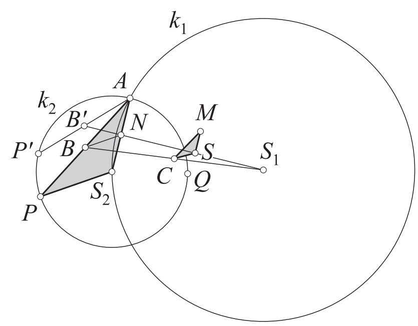
Slika 6.

Ideja je stoga postaviti središte S na sljedeći način. Konstruiramo točku $P' \in k_2$ tako da je trokut $AP'S_2$ jednakokračan pravokutan. Zatim odredimo polovište B' dužine $\overline{P'A}$. Konačno je S nožište okomice iz točke Q na pravac $B'S_1$ (slika 6).

Neka je, nadalje, N polovište dužine $\overline{AS_2}$. Prema tome, $|NS_2| = \dfrac{r}{2}$. $\overline{S_1N}$ je visina u jednakokračnom trokutu S_1AS_2 pa su točke B', N, S i S_1 kolinearne. Kako je $S_2N||QS$, prema definiciji točke Q vidimo da je $\overline{QS}$ srednjica trokuta NS_2S_1 pa je $|QS| = \dfrac{|NS_2|}{2} = \dfrac{r}{4}$.

Neka je točka M simetrična točki Q s obzirom na pravac $B'S_1$. Točka M pripada kružnici k, ali očito nije element skupa $\mathcal{G}$ jer M odgovara slučaju kad se točka P podudara s točkom A, pa definicija polovišta B nema smisla. Time smo u potpunosti odredili naš lokus. Stoga označimo $\mathcal{L} = k \backslash \{M\}$ i opet želimo dokazati da je $\mathcal{G} = \mathcal{L}$.

Sad promatramo općeniti položaj točke P na kružnici k_2. Pomicanjem točke P primjećujemo da bi trokuti SMC i S_2AP mogli biti slični (slika 7). U to se možemo uvjeriti mjerenjem njihovih kutova. No, cilj nam je to precizno dokazati. Trokut AS_1S_2 je jednakokračan i $\overline{QM}$ mu je srednjica pa M raspolavlja dužinu $\overline{AS_1}$. Dakle, $\overline{MC}$ je srednjica trokutu ABS_1, tj. $MC||AB$. Primijetimo da je točka N ujedno i presjek pravaca SS_1 i AS_2. Tada je $\overline{CS}$ srednjica trokuta BS_1N, a $\overline{BN}$ srednjica trokuta PS_2A. Stoga vrijedi $PS_2\|BN\|CS$. Konačno zaključujemo da su trokuti PS_2A i CSM slični po KK poučku o sličnosti trokuta. Trokut PS_2A je očito jednakokračan, a time je i trokut CSM jednakokračan. Dobivamo da je $|CS| = |SM|$ te točka C zaista pripada kružnici k i stoga je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$.



Slika 7.

Kao i u prethodnim zadacima dokazujemo i obratnu inkluziju. Neka je točka $C \in \mathcal{L}$. Definirat ćemo njoj pridruženu točku $P \in k_2$ tako da je $S_2P||SC$ (i vektori $\overrightarrow{SC}$ i $\overrightarrow{S_2P}$ su jednako orijentirani). Neka je B polovište dužine $\overline{AP}$. Tada je $\overline{BN}$ srednjica trokuta S_2AP pa je $BN||PS_2$, odnosno $BN||CS$. Kako je S polovište od $\overline{NS_1}$, $\overline{SC}$ je srednjica trokuta S_1NB pa je C polovište dužine $\overline{BS_1}$. Dakle, točka C se može opisati na način zadan u zadatku pa je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$ i time smo dokazali da je geometrijsko mjesto točaka skup $k \backslash \{M\}$.