

# Formule rekurzije za alternativne konačne sume potencija prirodnih brojeva

PETAR SVIRČEVIĆ, Zagreb

Većini srednjoškolaca je poznato, kako je C.F.Gauss (1777-1855), jedan od najvećih matematičara svih vremena, u drugom razredu napamet zbrojio prirodne brojeve od 1 do 100. Naime, njegov rezon je bio  $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \underbrace{(1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots + (50+51)}_{50} = 50 \cdot 101 = 5050$ . No, opća formula za zbroj prvih  $n$  prirodnih brojeva, koja se može izvesti na više načina, dana je u obliku  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ . Jednostavno se izvodi i formula rekurzije pomoću koje se nalaze sume:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ,  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, \dots$  Svakako, da pomoću ovih formula možemo naći i ove složenije sume:  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$ ,  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2), \dots$

No, u ovome članku mi izvodimo formule rekurzije pomoću kojih možemo naći ove alternativne sume:  $1 - 2 + 3 - \dots + (-1)^{n+1}n$ ,  $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n+1}n^2, \dots$ ; i složenije oblike:  $1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - \dots + (-1)^{n+1}n(n+1)$ ,  $1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - \dots + (-1)^{n+1}n(n+1)(n+2), \dots$

Prije nego prijedemo na izvođenje rekurzije uvedimo mnemotehničke oznake:

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \dots + n^m \quad (1)$$

$$\bar{S}_m(n) = 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \dots + (-1)^{n+1}n^m, \quad (2)$$

za  $n = 1, 2, 3, \dots$  i  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; tada je

$$S_0(n) = n, \quad (3)$$

$$\bar{S}_0(n) = \frac{1 - (-1)^n}{2}. \quad (4)$$

Naime, vidljivo je da gornji potez na lijevoj strani (2) asocira na alternativnu sumu.

Na osnovu definiranih suma (1) i (2) za  $k = 1, 2, 3, \dots$  izvodimo alternirajuće sumacione formule potencija istih eksponenata uzastopnih prirodnih brojeva: (eksponenti su neparni)

$$\begin{aligned} \overline{S}_{2k-1}(n) = \frac{1}{2k} \left\{ \left[ (n+1)^{2k} - n^{2k} \right] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \left[ \binom{2k}{0} S_0(n) + \binom{2k}{1} \bar{S}_1(n) + \binom{2k}{2} S_2(n) + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \binom{2k}{2k-3} \bar{S}_{2k-3}(n) + \binom{2k}{2k-2} S_{2k-2}(n) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

i (eksponenti su parni)

$$\begin{aligned} \overline{S}_{2k}(n) = \frac{1}{2k+1} \left\{ \left[ (n+1)^{2k+1} - n^{2k+1} \right] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \left[ \binom{2k+1}{0} \bar{S}_0(n) + \binom{2k+1}{1} S_1(n) + \right. \right. \\ \left. \left. + \binom{2k+1}{2} \bar{S}_2(n) + \dots + \binom{2k+1}{2k-2} \bar{S}_{2k-2}(n) + \binom{2k+1}{2k-1} S_{2k-1}(n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

U navedenim formulama koristimo dobro poznatu rekurziju

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left\{ (n+1)^{k+1} - 1 - \left[ \binom{k+1}{0} S_0(n) + \binom{k+1}{1} S_1(n) + \dots + \binom{k+1}{k-1} S_{k-1}(n) \right] \right\}, \quad (7)$$

koju dobijemo ako u razvijenu binomnu formulu  $(1+a)^{k+1}$  supstituiramo vrijednosti po redu za  $a = 1, 2, 3, \dots, n$ , te onda te razvoje zbrojimo.

Da dokažemo formulu (5) polazimo od razvoja

$$\left[1 - (-1)^a a\right]^b = \binom{b}{0} - \binom{b}{1}(-1)^a a^1 + \binom{b}{2}(-1)^{2a} a^2 - \binom{b}{3}(-1)^{3a} a^3 + \dots + (-1)^b \binom{b}{b}(-1)^{ba} a^b, \quad (8)$$

gdje je  $b$  paran broj. Sada u (8) izvršimo po redu uvrštavanje za  $a = 1, 2, 3, \dots, n$ , i te jednakosti zbrojimo. Dobivamo da je zbroj lijevih strana

$$S_b(n) \frac{1 + (-1)^n}{2} + \left[S_b(n) - n^b + (n+1)^b\right] \frac{1 - (-1)^n}{2} = S_b(n) + \left[(n+1)^b - n^b\right] \frac{1 - (-1)^n}{2}, \quad (9)$$

a zbroj desnih strana je

$$\binom{b}{0} S_0(n) + \binom{b}{1} \bar{S}_1(n) + \binom{b}{2} S_2(n) + \dots + \binom{b}{b-2} S_{b-2}(n) + \binom{b}{b-1} \bar{S}_{b-1}(n) + \binom{b}{b} S_b(n). \quad (10)$$

Nakon izjednačavanja i sređivanja (9) i (10), uz uvažavanje (3) i (4), dobivamo

$$\begin{aligned} \bar{S}_{b-1}(n) = \frac{1}{b} \left\{ \left[ (n+1)^b - n^b \right] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \left[ \binom{b}{0} S_0(n) + \binom{b}{1} \bar{S}_1(n) + \binom{b}{2} S_2(n) + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \binom{b}{b-3} \bar{S}_{b-3}(n) + \binom{b}{b-2} S_{b-2}(n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

I napokon, ako u (11) supstituiramo  $b = 2k$  dobivamo (5), što je i trebalo pokazati.

Za dokaz rekurzije (6) polazimo od razvoja

$$\left[a - (-1)^a\right]^b = \binom{b}{0} a^b - \binom{b}{1} (-1)^a a^{b-1} + \binom{b}{2} (-1)^{2a} a^{b-2} - \dots + (-1)^b \binom{b}{b} (-1)^{ba} a^0. \quad (12)$$

Analognom procedurom kao i u predhodnom slučaju, uz uvjet da je  $b$  neparan broj, dolazimo do tražene formule.

Sada idemo na primjenu rekurzija (5) i (6) rješavajući sljedeće probleme.

**Problem 1.** 
$$\bar{S}_1(n) = \frac{1 + (-1)^{n+1} (2n+1)}{4}. \quad (13)$$

*Rješenje.* Ako je  $k = 1$  tada iz (5) slijedi

$$\bar{S}_1(n) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ (n+1)^2 - n^2 \right] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \binom{2}{0} S_0(n) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ [2n+1] \frac{1 - (-1)^n}{2} - n \right\} \text{ ili nakon sređivanja}$$

dobivamo (13).

Za formule:  $\bar{S}_2(n), \bar{S}_3(n), \bar{S}_4(n), \dots$  moramo znati formule:  $S_1(n), S_2(n), S_3(n), \dots$  Prema tome navedimo samo neke formule, koje možemo dobiti iz (7):

$$S_1(n) = \frac{1}{2} n(n+1), \quad S_2(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad S_3(n) = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 = S_1^2(n), \quad (14), (15), (16)$$

$$S_4(n) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1), \quad S_5(n) = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1), \quad (17), (18)$$

$$S_6(n) = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1), \quad (19)$$

$$S_7(n) = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2), \quad (20)$$

$$S_8(n) = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3), \quad (21)$$

$$S_9(n) = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6 + 6n^5 + n^4 - 8n^3 + n^2 + 6n - 3). \quad (22)$$

**Problem 2.** 
$$\bar{S}_2(n) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n(n+1). \quad (23)$$

*Rješenje.* Ako  $k=1$  uvrstimo u (6) dobivamo

$$\begin{aligned} \bar{S}_2(n) &= \frac{1}{3} \left\{ [(n+1)^3 - n^3] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \left[ \binom{3}{0} \bar{S}_0(n) + \binom{3}{1} S_1(n) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ [(n+1)^3 - n^3] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2} + \frac{3}{2}n(n+1) \right] \right\} = \dots = -\frac{(-1)^n n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

**Problem 3.** 
$$\bar{S}_3(n) = \frac{1}{8}[-1 + (-1)^{n+1}(4n^3 + 6n^2 - 1)]. \quad (24)$$

*Rješenje.* Za  $k=2$  iz (5) dobivamo

$$\bar{S}_3(n) = \frac{1}{4} \left\{ [(n+1)^4 - n^4] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \left[ \binom{4}{0} S_0(n) + \binom{4}{1} \bar{S}_1(n) + \binom{4}{2} S_2(n) \right] \right\}.$$

Ako sada uvrstimo: (3), (13) i (15), tada nakon sređivanja slijedi (24)

**Problem 4.** 
$$\bar{S}_4(n) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n(n+1)(n^2 + n - 1). \quad (25)$$

*Uputa.* Za  $k=2$  iz (6) dobivamo

$$\bar{S}_4(n) = \frac{1}{5} \left\{ [(n+1)^5 - n^5 - 1] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \left[ \binom{5}{0} \bar{S}_0(n) + \binom{5}{1} S_1(n) + \binom{5}{2} \bar{S}_2(n) + \binom{5}{3} S_3(n) \right] \right\} = \dots$$

**Problem 5.** 
$$\bar{S}_5(n) = \frac{1}{4} [1 + (-1)^{n+1}(2n+1)(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1)]. \quad (26)$$

*Uputa.* Za  $k=3$  iz (5) dobivamo

$$\begin{aligned} \bar{S}_5(n) &= \frac{1}{6} \left\{ [(n+1)^6 - n^6] \frac{1 - (-1)^n}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \binom{6}{0} S_0(n) + \binom{6}{1} \bar{S}_1(n) + \binom{6}{2} S_2(n) + \binom{6}{3} \bar{S}_3(n) + \binom{6}{4} S_4(n) \right] \right\} = \dots = \\ &= \frac{1}{4} [1 + (-1)^{n+1}(2n^5 + 5n^4 - 5n^2 + 1)] = \dots = \frac{1}{4} [1 + (-1)^{n+1}(2n+1)(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1)]. \end{aligned}$$

Napomenimo, da jednačnja  $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1 = 0$  ima dva realna rješenja, koja nisu racionalna, a ostala dva su konjugirano kompleksna. Prema tome nema smisla polinom u (26) dalje rastavljati u faktore.

**Problem 6.** 
$$S(n) = 1 - 3 + 5 - \dots (-1)^{n+1}(2n-1) = (-1)^{n+1}n. \quad (27)$$

*Uputa.*  $S(n) = 2\bar{S}_1(n) - \bar{S}_0(n) = \dots$

**Problem 7.** 
$$S(n) = 1^2 - 3^2 + 5^2 - \dots (-1)^{n+1}(2n-1)^2 = \frac{1}{2} [(-1)^{n+1}(4n^2 - 1) - 1]. \quad (28)$$

*Uputa.*  $S(n) = 4\bar{S}_2(n) - 4\bar{S}_1(n) + \bar{S}_0(n) = \dots$

**Problem 8.** 
$$S(n) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + \dots + (-1)^{n+1}n(n+1) = \frac{1 - (-1)^n(2n^2 + 4n + 1)}{4}. \quad (29)$$

*Uputa.*  $S(n) = \bar{S}_2(n) + \bar{S}_1(n) = \dots$

**Problem 9.**

$$S(n) = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + \dots + (-1)^{n+1}(2n-1)(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1}(4n^2 + 4n - 1) - 1}{2}. \quad (30)$$

Uputa.  $S(n) = 4\bar{S}_2(n) - \bar{S}_0(n) = \dots$

**Problem 10.**

$$S(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (-1)^{n+1}n(n+1)(n+2) = \frac{3 + (-1)^{n+1}(2n+3)(2n^2 + 6n + 1)}{8}. \quad (31)$$

Uputa. Iz  $n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$  slijedi  $S(n) = \bar{S}_3(n) + 3\bar{S}_2(n) + 2\bar{S}_1(n) = \dots =$   
 $= \frac{3 - (-1)^n(4n^3 + 18n^2 + 20n + 3)}{8} = \frac{3 - (-1)^n(2n+3)(2n^2 + 6n + 1)}{8}.$

**Problem 11.**

$$S(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}(2i-1)(2i+1)(2i+3) = -3 + (-1)^{n+1}(n+1)(4n^2 + 8n - 3). \quad (32)$$

Uputa. Iz  $(2n-1)(2n+1)(2n+3) = 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$  slijedi

$$S(n) = 8\bar{S}_3(n) + 12\bar{S}_2(n) - 2\bar{S}_1(n) - 3\bar{S}_0(n) = \dots$$

**Problem 12.**

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}(ak+b)(ck+d) = \frac{ad + 2bd + bc - (-1)^n [2acn^2 + 2(ac + ad + bc)n + ad + bc + 2bd]}{4}. \quad (33)$$

Uputa.  $\dots = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} [ack^2 + (ad + bc)k + bd] = ac\bar{S}_2(n) + (ad + bc)\bar{S}_1(n) + bd\bar{S}_0(n) = \dots$

Napomenimo, ako uzmemo da je  $a = c = 1$  i  $b = d = 0$ , tada (33) prelazi u  $\bar{S}_2(n)$ .

$$\text{Problem 13.} \quad \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}(ai+b)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \bar{S}_{k-j}(n). \quad (34)$$

$$\text{Problem 14. a) } \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (-1)^{i+j} ij = \frac{1}{2} [\bar{S}_1^2(n) - S_2(n)], \quad \text{b) } \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (-1)^{i+j} ij = \bar{S}_1^2(n) - S_2(n). \quad (35), (36)$$

**Problem 15.** Ako je  $k = 1, 2, 3, \dots$  tada je:

$$\text{a) } \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (-1)^{i+j} (ij)^k = \frac{1}{2} [\bar{S}_k^2(n) - S_{2k}(n)], \quad \text{b) } \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (-1)^{i+j} (ij)^k = \bar{S}_k^2(n) - S_{2k}(n). \quad (37), (38)$$

Sada ćemo naše sume generalizirati za konačne sume, odnosno alternativne sume, potencija istih eksponenata uzastopnih članova općeg konačnog aritmetičkog reda. Dakle trebamo promotriti sume

$$S_{k,a,d}(n) = \sum_{i=1}^n (a + (i-1)d)^k, \quad \bar{S}_{k,a,d}(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (a + (i-1)d)^k, \quad (39), (40)$$

gdje je

$$S_{k,1,1}(n) = S_k(n), \quad \bar{S}_{k,1,1}(n) = \bar{S}_k(n). \quad (41), (42)$$

**Problem 16.** Ako je  $k = 2$  tada iz (40) slijedi

$$\bar{S}_{2,a,d}(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (a + (i-1)d)^2 = \frac{a(a-d)}{2} - \frac{(-1)^n}{2} [d^2 n^2 + (2a-d)dn + a(a-d)]. \quad (43)$$

Uputa. Za  $k = 2$  iz (40) dobivamo

$$\bar{S}_{2,a,d}(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} [a^2 + 2a(i-1)d + (i-1)^2 d^2] = \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= (a^2 - 2ad + d^2)\bar{S}_0(n) + 2(ad - d^2)\bar{S}_1(n) + d^2\bar{S}_2(n) = (\text{uvrstimo (4), (13), (23)}) \\
&= (a^2 - 2ad + d^2)\frac{1 - (-1)^n}{2} + 2(ad - d^2)\frac{1 - (-1)^n(2n+1)}{4} - d^2\frac{(-1)^n n(n+1)}{2} = \dots
\end{aligned}$$

**Problem 17.** 
$$S_{k,a,d}(n) = \sum_{i=1}^n (a + (i-1)d)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} d^j S_j(n-1).$$

*Uputa.* 
$$\dots = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} d^j (i-1)^j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} d^j (1^j + 2^j + \dots + (n-1)^j) = \dots$$

**Problem 18.** 
$$\bar{S}_{k,a,d}(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (a + (i-1)d)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} d^j \bar{S}_j(n-1).$$

*Uputa.* 
$$\dots = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{i-1} \binom{k}{j} a^{k-j} d^j (i-1)^j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} d^j (1^j - 2^j + \dots + (-1)^{n+1} (n-1)^j) = \dots$$

### Literatura:

- [1] I.N. Bronštejn-K.A. Semendjajev: *Matematički priručnik*, TK, Zagreb 1964.
- [2] Željko Hanjš: *Suma k-tih potencija prvih n prirodnih brojeva*, Bilten seminar iz matematike za nastavnike-mentore, Zadar 2002.
- [3] Ilija Ilišević: *Neke konačne sume*, Osječki matematički list, br. 1, Osijek 2011.