DIFERENCIJALNI RAČUN (m©h)

derivacije elementarnih funkcija, c – konstanta

$y=c \Rightarrow y'=0$ $\quad y=x \Rightarrow y'=1$ $\quad y=x^n \Rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$

$y=\frac{1}{x^n} \Rightarrow y'=-\frac{n}{x^{n+1}}$ $\quad y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ $\quad y=\sqrt[n]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\quad y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$

$y=e^x \Rightarrow y'=e^x$ $\quad y=a^x \Rightarrow y'=a^x\cdot\ln a$ $\quad y=\log_a x \Rightarrow y'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$ $\quad y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$

$y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x$ $\quad y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x$

$y=tg\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad y=ctg\,x \Rightarrow y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$y=sc\,x \Rightarrow y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=tg\,x\cdot sc\,x$ $\quad y=csc\,x \Rightarrow y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-ctg\,x\cdot csc\,x$

$y=\arcsin x \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad y=\arccos x \Rightarrow y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\mathrm{arc}\,tg\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}$ $\quad y=\mathrm{arc}\,ctg\,x \Rightarrow y'=-\frac{1}{1+x^2}$

$y=arc\,sc\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$ $\quad y=arc\,csc\,x \Rightarrow y'=-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$

www.halapa.com

$y=\mathrm{s}h\,x \Rightarrow y'=\mathrm{c}h\,x$ $\quad y=\mathrm{c}h\,x \Rightarrow y'=\mathrm{s}h\,x$

$y=th\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{ch^2 x}$ $\quad y=cth\,x \Rightarrow y'=-\frac{1}{\mathrm{s}h^2 x}$

$y=Ar\,sh\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad y=Ar\,ch\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$y=Ar\,th\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{1-x^2}$ $\quad y=Ar\,cth\,x \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2-1}$

---

derivacija zbroja funkcija u = u(x), v = v(x), h = h(x)

$$(u+v)'=u'+v' \quad , \quad (u+v+h)'=u'+v'+h'$$

Primjer $(x^3+\sin x)'=(x^3)'+(\sin x)'=3\cdot x^2+\cos x$

derivacija razlike funkcija u = u(x), v = v(x), h = h(x)

$$(u-v)'=u'-v' \quad , \quad (u-v-h)'=u'-v'-h'$$

Primjer $(e^x-2^x)'=(e^x)'-(2^x)'=e^x-2^x\cdot\ln 2$

derivacija umnoška funkcija u = u(x), v = v(x), h = h(x)

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \quad , \quad (u\cdot v\cdot h)'=u'\cdot v\cdot h+u\cdot v'\cdot h+u\cdot v\cdot h'$$

Primjer $(x^5\cdot e^x)'=(x^5)'\cdot e^x+x^5\cdot(e^x)'=5\cdot x^4\cdot e^x+x^5\cdot e^x=x^4\cdot e^x\cdot(5+x)$

derivacija kvocijenta funkcija u = u(x), v = v(x)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Primjer $\left(\frac{e^x}{x^3}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x^3 - e^x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{e^x \cdot x^3 - e^x \cdot 3 \cdot x^2}{x^6} = \frac{x^2 \cdot e^x \cdot (x-3)}{x^6} = \frac{e^x \cdot (x-3)}{x^4}$

derivacija funkcije u = u(x) s konstantnim faktorom c

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

Primjeri $(7 \cdot x^2)' = 7 \cdot (x^2)' = 7 \cdot 2 \cdot x = 14 \cdot x$, $(6 \cdot \cos x)' = 6 \cdot (\cos x)' = -6 \cdot \sin x$

logaritamska derivacija

logaritamskom derivacijom funkcije y = f(x) nazivamo derivaciju logaritma te funkcije

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Primjer $y = x^x \Rightarrow y = x^x \ / \ln \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x \ /' \Rightarrow (\ln y)' = (x \cdot \ln x)' \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \ / \cdot y \Rightarrow y' = y \cdot (\ln x + 1) \Rightarrow y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$

derivacija složene funkcije

ako je y = f(u) , u = g(x) tj. y = f(g(x))

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Primjeri $\left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$, $\left(\sin^3 5x\right)' = 3 \cdot \sin^2 5x \cdot 5 = 15 \cdot \sin^2 5x$

www.halapa.com

derivacija inverzne funkcije

ako funkcija y = f(x) ima derivaciju y_x', derivacija inverzne funkcije x = f $^{-1}$(y) je

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad \text{ili} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Primjer $y = x + e^x \Rightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(x + e^x)'} = \frac{1}{1 + e^x}$

derivacija funkcije zadane parametarski, t – parametar

ako je x = x(t) i y = y(t)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Primjer $\left.\begin{array}{l} x = 2 \cdot \sin t \\ y = 4 \cdot \cos t \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(4 \cdot \cos t)'_t}{(2 \cdot \sin t)'_t} = \frac{-4 \cdot \sin t}{2 \cdot \cos t} = -2 \cdot tg\, t$

derivacija implicitne funkcije

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow F'_x + F'_y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Primjer $x^3 + y^3 + 9 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{(x^3 + y^3 + 9)'_x}{(x^3 + y^3 + 9)'_y} = -\frac{3 \cdot x^2}{3 \cdot y^2} = -\frac{x^2}{y^2}$

diferencijal funkcije jedne varijable x, y = f(x)

$$dy = f\,'(x)\cdot dx$$

Primjer $y = x^3 \Rightarrow dy = \left(x^3\right)'\cdot dx = 3\cdot x^2\cdot dx$

oznake za derivaciju funkcije y = f(x) i definicija derivacije

$$y' = \frac{dy}{dx} = \dot{y} = Dy = f\,'(x) = Df(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad , \quad f\,'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

jednadžba tangente i normale na krivulju y = f(x) u točki $T(x_0, y_0)$

tangenta ... $y - y_0 = f\,'(x_0)\cdot(x - x_0)$, normala ... $x - x_0 + f\,'(x_0)\cdot(y - y_0) = 0$

INTEGRALNI RAČUN

integrali elementarnih funkcija, c – konstanta

$$\int dx = x + c \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \;,\; n \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x\pm a} = \ln|x\pm a| + c \qquad \int \frac{k\cdot dx}{ax\pm b} = \frac{k}{a}\cdot\ln|ax\pm b| + c \qquad \int\sqrt{ax+b}\cdot dx = \frac{2}{3a}\cdot\sqrt{(ax+b)^3} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\cdot(ax+b)} = \frac{-1}{b}\cdot\ln\frac{ax+b}{x} + c \qquad \int\frac{x\cdot dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\cdot\ln|ax+b| + c \qquad \int\frac{f\,'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot arctg\,\frac{x}{a} + c \qquad \int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$$

www.halapa.com

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int e^{a\cdot x}dx = \frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot x} + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \;,\; a > 0 \qquad \int\ln x\,dx = x\cdot\ln x - x + c$$

$$\int\sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int\cos x\,dx = \sin x + c \qquad \int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int ctg\,x\,dx = \ln|\sin x| + c \qquad \int\sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cdot\cos ax + c \qquad \int\cos ax\,dx = \frac{1}{a}\cdot\sin ax + c$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + c \qquad \int\sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + c \qquad \int\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + c$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + c \qquad \int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + c \qquad \int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int sh\,x\,dx = ch\,x + c \qquad \int ch\,x\,dx = sh\,x + c \qquad \int th\,x\,dx = \ln|ch\,x| + c$$

$$\int cth\,x\,dx = \ln|sh\,x| + c \qquad \int\frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + c \qquad \int\frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + c$$

---

pravilo integriranja: $F\,'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$

konstantni faktor izlučujemo pred znak integrala: $\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$

Primjer $\int 8\cdot x^3\,dx = 8\cdot\int x^3\,dx = 8\cdot\frac{x^4}{4} = 2\cdot x^4 + c$

integral sume jednak je sumi pojedinih članova

$$\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Primjer $\int\left[e^x+\cos x+3\right]dx = \int e^x\,dx + \int \cos x\,dx + \int 3\,dx = e^x + \sin x + 3\cdot\int dx = e^x + \sin x + 3\cdot x + c$

integral razlike jednak je razlici pojedinih članova

$$\int[f(x)-g(x)]dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Primjer $\int\left[\frac{1}{x}-2^x\right]dx = \int\frac{dx}{x} - \int 2^x\,dx = \ln x - \frac{2^x}{\ln 2} + c$

metoda supstitucije

Primjer $\int\frac{2x\,dx}{x^2+5} = \left[\begin{array}{l}\text{uvodimo supstituciju}\\ t = x^2+5\\ \text{nađemo diferencijal lijeve i desne strane}\\ dt = 2x\,dx\end{array}\right] = \int\frac{dt}{t} = \ln t = \ln\left(x^2+5\right) + c$

parcijalna integracija, u = u(x), v = v(x)

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Primjer $\int x\cdot e^x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x\\ dv = e^x\,dx\\ du = dx\\ v = \int e^x\,dx = e^x\end{array}\right] = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + c$

računanje određenog integrala pomoću neodređenog integrala, Newton – Leibnizova formula

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Primjer $\int_0^1\frac{2x\,dx}{x^2+3} = \left[\begin{array}{l} t = x^2+3\\ dt = 2x\,dx\\ x=0 \Rightarrow t = 0^2+3 = 3\\ x=1 \Rightarrow t = 1^2+3 = 4\end{array}\right] = \int_3^4\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_3^4 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}.$

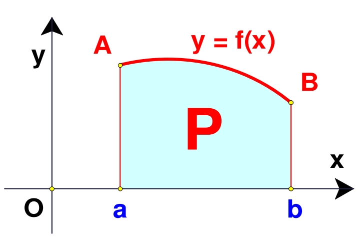
svojstva određenog integrala

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad , \quad \text{zamjena granica} \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

rastavljanje određenog integrala za bilo koje brojeve a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

površina i volumen



formula površine krivocrtnog trapeza ako je zadano y = f(x) i $a \le x \le b$

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

duljina luka krivulje ako je zadano y = f(x) i $a \le x \le b$

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

volumen tijela nastalog rotacijom krivocrtnog trapeza omeđenog krivuljom y = f(x), osi x i pravcima x = a i x = b, oko osi x ili osi y

$$V_X = \pi\cdot\int_a^b y^2\,dx \quad , \quad V_Y = 2\pi\cdot\int_a^b x\cdot y\,dx$$

www.halapa.com