Brojevi π, e, i kroz povijest

Martina Pezer[1] *i Josip Matejaš*[2], *Zagreb*

UVOD - DEFINICIJA

Brojevi π, e, i spadaju među najpoznatije matematičke konstante. Susrećemo ih u matematici, statistici, fizici, astronomiji te u mnogim drugim područjima sve do medicine i ekonomije. Njihova povijest je zanimljiva, a za π seže još u doba starog Egipta.

Broj π (pi) se definira kao omjer opsega i promjera kružnice u Euklidskoj geometriji, $\pi = \frac{o}{d} \approx 3{,}14159$.

Imaginarna jedinica i je definirana kao $i = \sqrt{-1}$, jer je to jedno (pozitivno) rješenje kvadratne jednadžbe: $x^2 + 1 = 0$, odnosno $x^2 = -1$. Broj i omogućava proširenje sustava realnih brojeva $\mathbb{R}$, na sustav kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Eulerov broj e možemo definirati kao $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828459045$ i predstavlja bazu prirodnih logaritama.

POVIJEST

Broj π

U **Bibliji** se nalazi jedan zanimljiv tekst: „Tada od rastaljene kovine izli more koje je od ruba do ruba mjerilo deset lakata; bilo je okruglo naokolo, pet lakata visoko, a u opsegu, mjereno vrpcom, imalo je trideset lakata." (Kraljevi I 7, 23)

To su mjere Solomonova velikog hrama, sagrađenog oko 950. god. pr. Kr. i uočavamo kako je $\pi = \frac{o}{d} = \frac{30}{10} = 3$. Iako je i ovo iznenađujuće, ranije procjene broja π su puno starije i točnije. Tako su još davne 1700. god. pr. Kr. **Egipćani** procijenili π na 3,16, a **Sumerani**

---

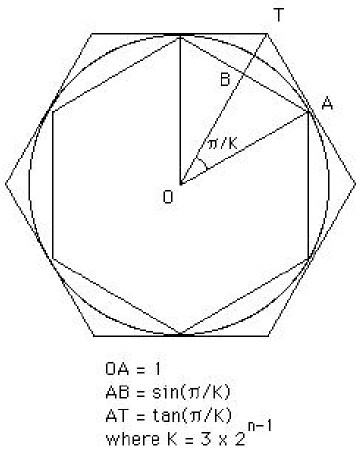
[1] Autorica je demonstratorica na kolegiju "Matematika" Katedre za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: m_pezer@net.hr

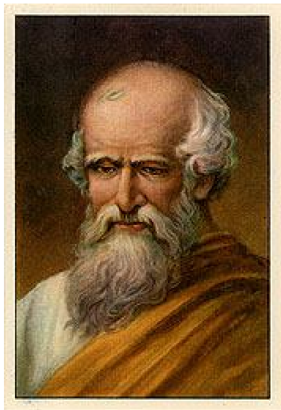
[2] Koautor je docent na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, (bavi se numeričkim algoritmima), e-mail: jmatejas@efzg.hr

računali π kao 3,125. Naravno i **Kinezi** su se istaknuli oko 500. god. pr. Kr. uzevši $\pi = \frac{355}{113}$.

Arhimed (287. – 212. god. pr. Kr.) je prvi precizno definirao interval $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, čija je sredina 3.1418, koja od broja π odstupa za približno 0.0002.

Ovo je **Arhimedov argument**: Promatramo kružnicu čiji je polumjer jednak 1. U nju upišemo pravokutni mnogokut s $3 \times 2^{n-1}$ stranica, poluopsega b_n, a oko nje pravokutni mnogokut s $3 \times 2^{n-1}$ stranica, poluopsega a_n. Na slici 1 je prikazan slučaj kada je n=2.





Slika 1: Arhimed (287.-212. god. pr. Kr.) – računanje broja π

Potrebno je definirati rastući niz b_1, b_2, b_3,... i padajući niz a_1, a_2, a_3,... tako da oba imaju granicu π. Ako primijenimo trigonometrijsku notaciju dobivamo da su dva poluopsega dana sa: $a_n = K \tan(\pi/K)$, $b_n = K \sin(\pi/K)$, gdje je $K = 3 \times 2^{n-1}$. Za n+1: $a_{n+1} = 2K \tan(\pi/2K)$, $b_{n+1} = 2K \sin(\pi / 2K)$. Daljnjim računanjem, sve do a_6 i b_6, Arhimed je zaključio $b_6 < \pi < a_6$. Važno je naglasiti kako Arhimed nije mogao koristiti trigonometriju i algebarsku notaciju. Služio se isključivo geometrijom te ovaj izračun nije bio nimalo trivijalan zadatak.

Nakon Grka, Rimljani su zbog svojih uvjerenja krivi za zastoj u matematici, a u „mračnom“ srednjem vijeku istaknuo se jedino **Fibonacci** s procjenom $\pi = 3.141818$. Ali zahvaljujući Arapima ipak se uspješno premostio gotovo tisućljetni jaz u znanju. Europska renesansa je napokon dovela do uzleta u matematičkom svijetu. **Ludolph van Ceulen** je proveo veliki dio svog života računajući numeričku vrijednost broja π pomoću Arhimedove metode, te je tako do 1596. izračunao prvih 35 decimala,

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288 .$$

S vremenom su se razvile formule za lakše računanje. Jedna od najpoznatijih je bila **Wallisova** (1616. – 1703.): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...$ Jedini problem u računanju vrijednosti π je bila dosada mehanike računanja.

Kronološki je to izgledalo ovako: 1699. Sharp je izračunao 71 točnu decimalu. 1701. Machin je unaprijedio računanje i izračunao 100 decimala, a njegovi sljedbenici su koristili njegovu metodu, sve do Shanksa, koji je 1873. izračunao 707 decimala, od kojih je prvih 527 bilo točno. Shanks je znao da je π **iracionalan** jer je to dokazao Lambert 1761. Lindeman je uskoro dokazao da je π **transcendentan**, tj. broj koji nije rješenje algebarske jednadžbe čiji su koeficijenti cijeli brojevi. Ovime je dokazano da je jedan od tri poznata grčka klasična problema, kvadratura kruga, nerješiv.

Nedugo nakon Shanksova izračuna, De Morgan je uočio neobičnu **statističku pogrešku**: u zadnjih nekoliko decimala nedostaju sedmice. Tek je 1945. Ferguson otkrio pogrešku na 528. decimali, nakon koje su sve znamenke pogrešne. 1949. godine je pomoću računala određeno 2000 decimala broja π. U ovom i svim kasnijim računalnim izračunima, broj sedmica ne odstupa značajno od očekivanja i nizovi su prošli sve statističke testove slučajnosti.

Potrebno je spomenuti i nešto o **notaciji** broja π. Još 1647. Oughtred je označavao simbolom d / π omjer promjera kruga i opsega. David Gregory (1697.) je oznaku π / r koristio za omjer opsega i polumjera. Prvi koji je upotrijebio π s današnjim značenjem je velški matematičar William Jones 1706. godine: „3.14159 *andc.* = π". **Euler** je prihvatio simbol 1737. godine i otada je ušao u standardnu notaciju.

Poznat je još jedan statistički kuriozitet, tzv. **Buffonov eksperiment s iglom**. Ako imamo ravnomjernu mrežu paralelnih linija, jednako razmaknutih i ako bacimo iglu duljine $k < 1$, vjerojatnost da će igla pasti preko linije je $2k / \pi$. Nekoliko ljudi je pokušavalo izračunati π bacanjem igala. Najznačajniji rezultat je postigao Lazzerini (1901.), koji je čak bacio iglu 34080 puta i dobio vrijednost $\pi = \frac{355}{113} = 3.1415929$, koja je slučajno (a možda i ne) jednaka kineskom otkriću. No, Kendall i Moran su zaključili kako je preciznije izrezati veliki krug drveta i uzeti krojački metar te izračunati odnos opsega i promjera.

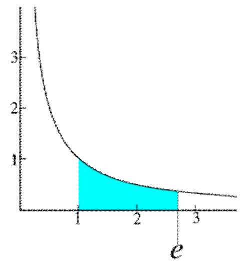
Koliko je π utjecajan, svjedoči i gotovo nevjerojatna priča, kada su iskoristili π kao ispriku za rasistički napad na eminentnog matematičara Edmunda Landaua 1934. u Njemačkoj, a svoju kontroverznost je opravdao i u SAD-u 1897. u jednoj političkoj debati.

Još neke zanimljivosti: Prije su testirali nova računala izračunom π na puno decimala, a u ranim matematičkim zapisima nije bilo poznato da je omjer površine kruga i kvadrata polumjera jednak omjeru opsega i promjera kružnice.

Pi dan i Dan procjene broja Pi su dva dana posvećena slavljenju matematičke konstante π. Pi dan se obilježava 14. ožujka (3.14), kada su i rođendani **Alberta Einsteina** i Waclava Sierpinskog. Također se može obilježavati i 4. ožujka (kada prođe 14% mjeseca ožujka). Dan procjene broja Pi se obilježava 22. srpnja, jer je π približno jednak 22/7. Ipak, svi navedeni datumi su „procijenjeni dani" jer je π iracionalan broj. Zanimljivo je da u prvih 1.254.543 znamenki broja π možete na internetu pronaći datum svog rođendana.

Broj *e*

Za razliku od π, *e* je relativno **nova pridošlica** na matematičku scenu. Broj *e* se u matematici pojavljuje na nevažan način 1618. kada se u dodatku **Nappierovog** rada o logaritmima pojavila tablica vrijednosti prirodnih logaritama raznih brojeva. No, tada se nije znalo da su to logaritmi s bazom *e* jer oni nisu imali današnje značenje. Ta je tablica, iako nepotpisana, gotovo sigurno djelo Oughtreda. Potom je 1624. Briggs dao numeričku procjenu $\log e$, ali *e* nije spominjao kao takav u svom radu.



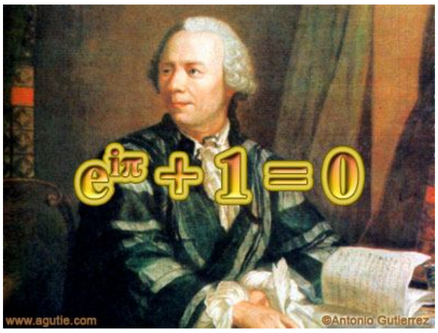
Slika 2: Površina ispod hiperbole = 1

Sljedeća pojava broja *e* je opet dvojbena. 1647. Saint-Vincent je računao površinu ispod istostrane hiperbole i nepoznato je je li uopće shvatio vezu s logaritmima i je li naišao na *e*. Ali već 1661. **Huygens** je shvatio odnos, koji je pažljivo promatrao kod istostrane hiperbole $xy = 1$ i logaritma. Broj *e* je takav da je **površina ispod istostrane hiperbole** od 1 do *e* jednaka 1. Huygens je također definirao krivulju, koju je nazvao logaritamska, ali u današnjoj terminologiji ona bi bila eksponencijalna, formule $y = ka^x$.

Nicolaus Mercator je 1668. objavio rad „Logarithmotechnia" u kojem se nalazi razvoj $\log(1+x)$. Mercator je tada prvi upotrijebio izraz **„prirodni logaritam"** za logaritme baze *e*. Ali ni tada se broj *e* nije pojavio kao samostalan te je opet ostao doslovno iza ugla.

Jacob Bernoulli je 1683. razmatrao problem kamata na kamatu i pokušavao naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Binomnim teoremom je pokazao da se granica nalazi između 2 i 3, što se danas smatra prvom procjenom broja *e*. To također možemo promatrati i kao definiciju broja *e* te je to i **prvo definiranje broja limesom**. Kao što smo već ranije spomenuli danas je logaritam funkcija, a nekada je služio isključivo kao pomoć u računanju. Možda je Jacob Bernoulli prvi shvatio inverznost logaritamske i eksponencijalne funkcije, ali je James Gregory prvi povezao logaritme i eksponente.

Broj *e* se prvi put samostalno pojavio 1690. Leibniz je u pismu Huygensu upotrijebio slovo *b* za današnje *e*. S obzirom na to da većinu matematičke notacije dugujemo Euleru, vjerojatno nije iznenađenje ni njegovo označavanje broja *e*. Iako neki tvrde da *e* potječe od prvog slova njegova imena, ta tvrdnja je smiješna. Najvjerojatnije oznaka *e* potječe od toga što je e sljedeći samoglasnik nakon a, kojeg je Euler već iskoristio. Koji god razlog bio, oznaka *e* se prvi put pojavila u pismu Eulera Goldbachu 1731., ali je tek 1748. **Euler** u svom radu „Introductio in Analysin infinitorum“ objavio sve ideje. Dokazao je da je $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$ i da je $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Euler je procijenio *e* na čak 18 decimalnih mjesta. Između ostalih zanimljivih rezultata, u njegovom djelu, ističe se već ranije spomenuta **veza između trigonometrijskih funkcija i kompleksnih eksponencijalnih funkcija** do kojih je Euler došao De Moivreovom formulom: $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$. Iako mnogi vjeruju da je Euler dokazao **iracionalnost** broja *e*, zapravo je Hermite 1873. dokazao da nije algebarski broj.



Slika 3: Leonhard Euler (1707. - 1783.) i "Najljepša matematička formula svih vremena"

Znatiželja zbog koje su ljudi računali π na što više decimala, nije se toliko odrazila na broj *e*, no i tu je bilo iznimaka. **Shanks** je 1854. prvi izračunao veliki broj decimala broja *e* (ali je Shanks bio još veći entuzijast pri računanju decimala broja π). Glaisher je dokazao da je prvih 137 decimala, koje je izračunao Shanks, bilo točno, a nakon korekcije, Shanks je izračunao točnih 205 decimala. Napomenimo da je potrebno čak 120 pribrojnika reda $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$ za 200 točnih decimala.

Broj *i*

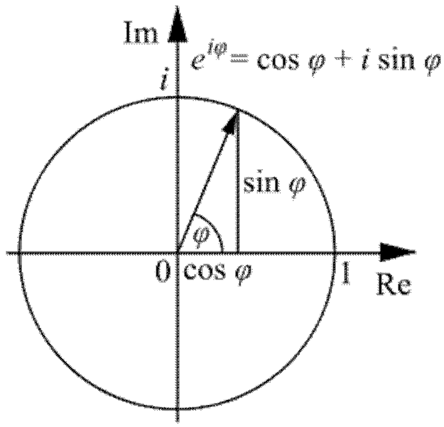
Najranije ideje o kvadratnim korijenima negativnih brojeva vjerojatno potiču iz radova grčkog matematičara i inovatora **Herona iz Aleksandrije** u 1. st., iako negativni brojevi nisu otkriveni u Helenističkom svijetu. Heron je razmatrajući volumen nemoguće krnje piramide došao nenamjerno do njihove potencijalne spoznaje. No, tek puno stoljeća kasnije raste zanimanje za kompleksne brojeve.

Rješavajući kubne jednadžbe talijanski matematičar Gerolamo **Cardano** je prvi definirao i upotrijebio kompleksne brojeve, nazvavši ih **"fiktivnima"**. Za rješenje opće kubne jednadžbe ponekad je potrebno računanje kvadratnih korijena negativnih brojeva, iako su konačna rješenja realni brojevi (causus irreducibilis). Tom spoznajom je uveden osnovni teorem algebre koji kazuje kako svaka polinomna jednadžba stupnja 1 ili više, ima rješenje u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Rafael **Bombelli** je prvi objasnio tada naizgled paradoksalna rješenja kubnih jednadžbi te razvio pravila za kompleksnu aritmetiku (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje), a irski matematičar William Rowan **Hamilton** je uveo apstraktniji formalizam proširivši ga na teoriju kvaterniona.

"Fiktivni" su brojevi bez sumnje bili tabu jer u to vrijeme niti negativni brojevi nisu bili na čvrstom tlu. Tada podrugljiv (podcjenjujući) pojam **"imaginarni"** prvi je skovao René **Descartes** 1637. Dodatne probleme i zabunu je uzrokovala jednadžba $\sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$, koja je bila hirovito nekonzistentna s algebarskim identitetom $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, koji vrijedi za pozitivne realne brojeve *a* i *b*, a također se koristila u računanjima kompleksnim brojevima *a* i *b* (jednim pozitivnim a drugim negativnim). Pogrešno korištenje toga identiteta, kada su i *a* i *b* negativni, je zbunjivala čak i Eulera zbog čega je uveden poseban simbol *i*.

Zamahom razvoja matematike u novom vijeku, u 18. st. su kompleksni brojevi ušli u širu upotrebu jer se manipulacijom kompleksnim brojevima moglo pojednostaviti izraze sa trigonometrijskim funkcijama. Tako je 1730. Abraham de Moivre došao do svoje dobro poznate formule $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, nazvane po njemu, **de Moivreova formula**. 1748. Leonhard Euler je otišao korak dalje s **Eulerovom formulom kompleksne analize**: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, kojom se komplicirani trigonometrijski identiteti mogu svesti na puno jednostavnije eksponencijalne identitete.

No, postojanje kompleksnih brojeva nije bilo potpuno prihvaćeno sve do geometrijske interpretacije Caspara Wessela 1799. godine, koju je ponovno otkrio i popularizirao **Carl Friedrich Gauss** nekoliko godina kasnije; kada se teorija kompleksnih brojeva značajno proširila. Gauss je dokazao da svaka polinomska jednadžba $f(x) = 0$ ima barem jedan korijen, i to bilo da su koeficijenti realni, bilo kompleksni. Ali ideja o grafičkom prikazu kompleksnih brojeva se pojavila još davne 1685. u Wallisovom djelu "De Algebra Tractatus". Ona je nažalost ostala nezapažena čak i kada ju je predložio i Wessel, te je Gauss neovisno o njima iznio istu ideju, pa se danas takva ravnina obično naziva **Gaussovom kompleksnom ravninom**.



Slika 4: Karl Friedrich Gauss (1777. - 1855.) - Gaussova kompleksna ravnina

Uobičajene izraze koji se koriste u teoriji kompleksnih brojeva su uveli još sami osnivači: Argand je izraz $\cos\varphi + i\sin\varphi$ nazvao *faktor smjera*, a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ *modulom*, Cauchy je $\cos\varphi + i\sin\varphi$ nazvao *reduciranim oblikom* (l'expression réduite), Gauss je koristio i za $\sqrt{-1}$, uveo naziv *kompleksni broj* za $a + bi$, a $a^2 + b^2$ nazvao *normom*. Naziv *koeficijent smjera*, često korišten za izraz $\cos\varphi + i\sin\varphi$ dugujemo Hankelu, a *apsolutnu vrijednost* za *modul* je uveo Weierstrass.

Samom razvoju kompleksnih brojeva su pridonijeli i Abbé Buée, Jean-Robert Argand, Mourey, Augustin Louis Cauchy, Niels Henrik Abel, a slijedeći trag Cauchyja i Gaussa istaknulo se još nekoliko matematičara: Kummer, Leopold Kronecker, Scheffler, Bellavitis, Peacock, De Morgan, Möbius i Dirichlet.

PRIMJENA

Navodimo neke od mnoštva poznatih formula koje sadrže ove konstante.

Matematika. Prikaz kompleksnih brojeva: $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, Eulerov identitet: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, Stirlingova procjena: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, Gamma funkcija: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, Vieteova formula: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdot \ldots = \frac{2}{\pi}$, Bazelski problem: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$, karakteristika Eulerove φ funkcije: $\sum_{k=0}^{n}\phi(k)\sim 3n^2/\pi^2$,

teorem o reziguumu: $\oint\frac{dz}{z}=2\pi i$, broj π i verižni razlomak: $\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{...}}}}$, itd.

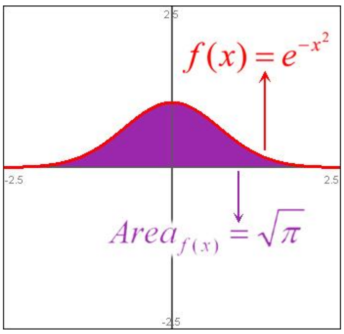
U geometriji je π svima dobro poznat - opseg kruga: $o=2r\pi$, površina kruga: $P=r^2\pi$, volumen kugle: $V=\frac{4}{3}r^3\pi$, površina kugle: $P=4r^2\pi$, volumen valjka: $V=r^2h\pi$, oplošje valjka: $P=2\pi r(r+h)$, oplošje stošca: $P=r\pi\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)$ itd.

Fizika. Kozmološka konstanta: $\Lambda=\frac{8\pi G}{3c^2}\rho$, Coulombov zakon: $F=\frac{|q_1q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, magnetska permeabilnost zrakopraznog prostora: $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}N/A^2$, Einsteinova opća teorija relativnosti: $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}$, Heisenbergov princip neodređenosti: $\Delta x\Delta p\geq\frac{h}{4\pi}$.

Statistika. Redovito funkcije distribucije vjerojatnosti sadrže π i/ili e, npr. normalna distribucija: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, Cauchyjeva: $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, Poissonova: $p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, itd.

Ako igrač igra *n* puta na jednorukom jacku koji isplaćuje dobitak u 1 od *n* pokušaja, vjerojatnost da igrač neće ništa osvojiti (u velikom broju pokušaja) iznosi otprilike 1/*e*.

Poznat je Gaussov integral: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ koji, ako se normalizira na vrijednost 1, predstavlja normalnu distribuciju vjerojatnosti, a sama **Gaussova krivulja** $f(x)=e^{-x^2}$ ima puno primjena u znanosti.



Slika 5:Gaussova krivulja (normalna distribucija)

Ekonomija. U ekonomiji broj e susrećemo u financijskoj matematici kod neprekidnog ukamaćivanja. Polazimo od formule složenog kamatnog računa, $C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, gdje su C_0 i C_n početna i konačna vrijednost glavnice, p godišnja kamatna stopa a n broj godina. Ako se ukamaćivanje vrši m puta godišnje, tada u formuli imamo $p \to p/m$, $n \to n \cdot m$. Promatramo li slučaj $m \to \infty$, imamo

$$C_n = C_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm} = \{x = 100m\} = C_0 \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{x}\right)^x\right]^{n/100} = C_0\left[e^p\right]^{n/100} = C_0 e^{\frac{np}{100}}.$$

Dobiveni izraz vrijedi u slučaju kad se ukamaćivanje vrši beskonačno mnogo puta godišnje, tj. kad se kamate pripisuju glavnici svakog trenutka (neprekidno – kontinuirano). To nije slučaj u financijskoj praksi, ali zato formula vjerno opisuje kontinuirani rast živih bića (pojedinačno ili kao populacije). Pri tome je p prosječna stopa (godišnjeg) prirasta.

Primjer. Godine 1995. na Zemlji je živjelo 5 674 380 000, a 2005. godine 6 453 628 000 ljudi. Ako prosječna stopa godišnjeg prirasta ostaje nepromijenjena, kada možemo očekivati da će se broj stanovnika na Zemlji udvostručiti ?

Imamo: $C_0 = 5674380000$, $C_n = 6453628000$, $n = 10$ god., $p = ?$, pa je

$$C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}} \Rightarrow p = \frac{100}{n}\left(\ln C_n - \ln C_0\right) = 1,28681147\% \text{ (prosječna stopa godišnjeg prirasta).}$$

Uz ovu stopu prirasta, iz uvjeta $C_n = 2C_0$, na sličan način dobivamo

$$n = \frac{100}{p}\left(\ln C_n - \ln C_0\right) = \frac{100}{p}\cdot \ln 2 = 53.865 \approx 54 \text{ godine.}$$

LITERATURA

[1.] Arndt, J., Haenel, C.: **Pi unleashed**, Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

[2.] Matejaš, J.: **Financijska matematika 3**, predavanje, http://www.efzg.hr

[3.] Pezer, M.: **Povijest matematike**, seminarski rad, Zagreb, 2008.

[4.] The MacTutor History of Mathematics archive, **Pi through the ages** i **e**: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/

[5.] Weisstein, Eric W. **"Complex Number"** From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ComplexNumber.html

[6.] Wikipedia, **Complex number** i **E (mathematical constant)**: http://en.wikipedia.org/wiki/