1.

Zadatak 234 (Petar, gimnazija)

Točka T(27, 18) leži na paraboli $y^2 = 12 \cdot x$. Koliko je točka T udaljena od ravnalice (direktrise) te parabole?

$$A.\ 30 \text{ jediničnih duljina} \qquad B.\ 35 \text{ jediničnih duljina}$$
$$C.\ 39 \text{ jediničnih duljina} \qquad D.\ 40 \text{ jediničnih duljina}$$

Rješenje 234

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n.$$

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x.$$

Ravnalica (direktrisa) ima jednadžbu:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{\left| A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \ne 0, \quad n \ne 1.$$

Najprije iz jednadžbe parabole odredimo parametar p.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ y^2 = 12 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \;/ : 2 \Rightarrow p = 6.$$

Napišemo jednadžbu ravnalice u implicitnom obliku.

$$x = -\frac{p}{2} \Rightarrow \left[p = 6 \right] \Rightarrow x = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow$$

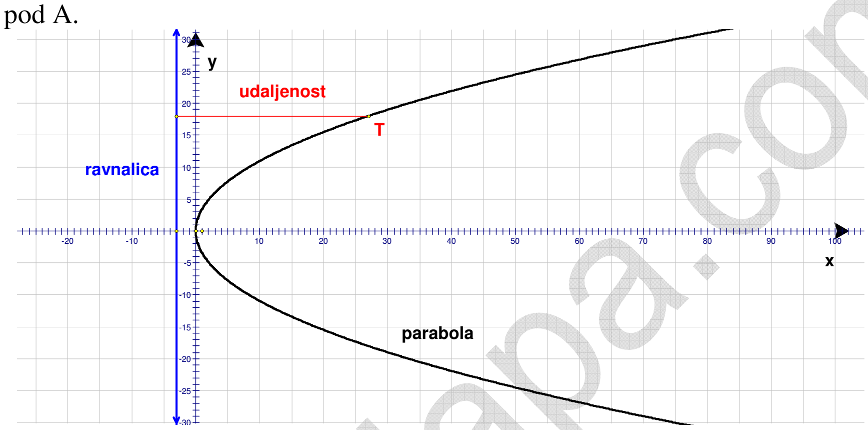
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A\cdot x+B\cdot y+C=0 \\ 1\cdot x+0\cdot y+3=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=1 \\ B=0 \\ C=3 \end{matrix}\right\}.$$

Udaljenost točke T od ravnalice r iznosi:

$$\left.\begin{matrix} T(x_\circ,\ y_\circ)=T(27,\ 18) \\ A=1\ ,\ B=0\ ,\ C=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\ |T,\ r|=\frac{|A\cdot x_\circ+B\cdot y_\circ+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ \right] \Rightarrow |T,\ r|=\frac{|1\cdot 27+0\cdot 18+3|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |T,\ r|=\frac{|27+0+3|}{\sqrt{1+0}} \Rightarrow \quad |T,\ r|=\frac{|30|}{\sqrt{1}} \Rightarrow |T,\ r|=\frac{30}{1} \Rightarrow |T,\ r|=30.$$

Odgovor je pod A.



Vježba 234

Odmor!

Rezultat: …

2.

Zadatak 509 (Nina, gimnazija)

Riješite nejednadžbu: $6^{x}-16\cdot 3^{x}<0.$

Rješenje 509

Ponovimo!

$$a^{n}\cdot b^{n}=(a\cdot b)^{n} \quad , \quad a\cdot b<0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a<0 \\ b>0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} a>0 \\ b<0 \end{matrix}\right\} \quad , \quad a^{f(x)}<a^{g(x)} \;,\; a>1 \Rightarrow f(x)<g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$6^{x}-16\cdot 3^{x}<0 \Rightarrow (2\cdot 3)^{x}-16\cdot 3^{x}<0 \Rightarrow 2^{x}\cdot 3^{x}-16\cdot 3^{x}<0 \Rightarrow 3^{x}\cdot\left(2^{x}-16\right)<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{broj } 3^{x} \text{ je pozitivan} \\ 3^{x}>0 \end{matrix}\right] \Rightarrow 2^{x}-16<0 \Rightarrow 2^{x}<16 \Rightarrow 2^{x}<2^{4} \Rightarrow x<4 \Rightarrow x\in\langle-\infty, 4\rangle.$$

Vježba 509

Riješite nejednadžbu: $6^{x}<16\cdot 3^{x}.$

Rezultat: $x\in\langle-\infty, 4\rangle.$

3.

Zadatak 807 (Ante, srednja škola)

Što je rezultat sređivanja izraza $\left(\frac{4\cdot x+12}{x^2-3\cdot x}+\frac{x}{9-x^2}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}$,

za sve x za koje je izraz definiran?

$$A.\ -\frac{2}{x}\qquad B.\ \frac{2}{x}\qquad C.\ \frac{10\cdot(x+3)}{x\cdot(x-3)}\qquad D.\ \frac{2\cdot(x-3)}{5\cdot x\cdot(x+3)}$$

Rješenje 807

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\left(\frac{4\cdot x+12}{x^2-3\cdot x}+\frac{x}{9-x^2}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=\left(\frac{4\cdot x+12}{x\cdot(x-3)}+\frac{x}{-\left(x^2-9\right)}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=$$

$$=\left(\frac{4\cdot x+12}{x\cdot(x-3)}-\frac{x}{x^2-9}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=\left(\frac{4\cdot x+12}{x\cdot(x-3)}-\frac{x}{(x-3)\cdot(x+3)}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=$$

$$=\frac{(4\cdot x+12)\cdot(x+3)-x^2}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=\frac{4\cdot x^2+12\cdot x+12\cdot x+36-x^2}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=$$

$$=\frac{3\cdot x^2+24\cdot x+36}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=\frac{3\cdot x^2+24\cdot x+36}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}=$$

$$=\frac{3\cdot x^2+24\cdot x+36}{x\cdot(x-3)}\cdot\frac{1}{x+6}-\frac{5}{x-3}=\frac{3\cdot x^2+24\cdot x+36}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}-\frac{5}{x-3}=$$

$$=\frac{3\cdot x^2+24\cdot x+36-5\cdot x\cdot(x+6)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=\frac{3\cdot x^2+24\cdot x+36-5\cdot x^2-30\cdot x}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=$$

$$=\frac{-2\cdot x^2-6\cdot x+36}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=\frac{-2\cdot\left(x^2+3\cdot x-18\right)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku uporabimo}\\ \text{metodu grupiranja}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{-2\cdot\left(x^{2}-3\cdot x+6\cdot x-18\right)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=\frac{-2\cdot\left(\left(x^{2}-3\cdot x\right)+(6\cdot x-18)\right)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=\frac{-2\cdot\left(x\cdot(x-3)+6\cdot(x-3)\right)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=$$

$$=\frac{-2\cdot(x-3)\cdot(x+6)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=\frac{-2\cdot(x-3)\cdot(x+6)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+6)}=-\frac{2}{x}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 807

Što je rezultat sređivanja izraza $\left(\frac{4\cdot x+12}{x^{2}-3\cdot x}+\frac{x}{9-x^{2}}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}+\frac{5}{3-x}$,

za sve x za koje je izraz definiran?

$A.\ -\frac{2}{x}$ $\qquad B.\ \frac{2}{x}$ $\qquad C.\ \frac{10\cdot(x+3)}{x\cdot(x-3)}$ $\qquad D.\ \frac{2\cdot(x-3)}{5\cdot x\cdot(x+3)}$

Rezultat: A.

4.

Zadatak 491 (Marinko, srednja škola)

Koji prirodni brojevi imaju **točno četiri** djelitelja?

Rješenje 491

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1.

Svaki prost broj ima točno dva djelitelja. To su broj 1 i taj broj. Umnožak dva proizvoljna međusobno različita prosta broja p i q ima točno četiri djelitelja: 1, p, q, p · q.

Vježba 491

Koji prirodni brojevi imaju **točno tri** djelitelja?

Rezultat: 1, p, p^2, gdje je p prost broj.

5.

Zadatak 265 (Ana, ekonomska škola)

Odredi funkciju f(x) ako je $f(a\cdot x)=b\cdot x,$ gdje su a i b realni brojevi različiti od nule.

$A.\ f(x)=a\cdot b\cdot x \qquad B.\ f(x)=\frac{b}{a}\cdot x \qquad C.\ f(x)=\frac{a}{b}\cdot x \qquad D.\ f(x)=\frac{1}{a\cdot b}\cdot x$

Rješenje 265

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b.$$

$$f(a\cdot x)=b\cdot x \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ a\cdot x=y \\ x=\frac{y}{a} \end{bmatrix} \Rightarrow f(y)=b\cdot\frac{y}{a} \Rightarrow f(y)=\frac{b}{a}\cdot y \Rightarrow f(x)=\frac{b}{a}\cdot x.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 265

Odredi funkciju f(x) ako je $f(b\cdot x)=a\cdot x,$ gdje su a i b realni brojevi različiti od nule.

$A.\ f(x)=a\cdot b\cdot x \qquad B.\ f(x)=\frac{b}{a}\cdot x \qquad C.\ f(x)=\frac{a}{b}\cdot x \qquad D.\ f(x)=\frac{1}{a\cdot b}\cdot x$

Rezultat: C.

6.

Zadatak 490 (Maturant, gimnazija)

Dokaži da za svaki prirodni broj n > 1 vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{1}{2}.$$

Rješenje 490

Ponovimo!

$$0<a<b\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\quad,\quad a>b\ ,\ c>d\ \Rightarrow\ a+c>b+d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} n+1&<2\cdot n\\ n+2&<2\cdot n\\ n+3&<2\cdot n\\ &\ldots\\ 2\cdot n&=2\cdot n \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{aligned} \frac{1}{n+1}&>\frac{1}{2\cdot n}\\ \frac{1}{n+2}&>\frac{1}{2\cdot n}\\ \frac{1}{n+3}&>\frac{1}{2\cdot n}\\ &\ldots\\ \frac{1}{2\cdot n}&=\frac{1}{2\cdot n} \end{aligned}\right\}.$$

Budući da je svaki od n – 1 pribrojnika veći od $\frac{1}{2\cdot n}$ (a posljednji je pribrojnik jednak $\frac{1}{2\cdot n}$), zbroj je veći od $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}>n\cdot\frac{1}{2\cdot n}=n\cdot\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 490

Odmor!

Rezultat: …

7.

Zadatak 805 (Ivana, ekonomska škola)

Rastavite na faktore izraz $x^3-4.$

Rješenje 805

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a \quad , \quad a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right) \quad , \quad a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right).$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \quad , \quad \sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt[3]{a^3}=a.$$

$$x^3-4=x^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right)=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{4^2}\right)=$$

$$=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{16}\right)=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{8\cdot 2}\right)=$$

$$=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}\right)=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}\right)=$$

$$=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}\right)=\left(x-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}\cdot x+2\cdot\sqrt[3]{2}\right).$$

Vježba 805

Rastavite na faktore izraz $x^3+4.$

Rezultat: $\left(x+\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x^2-\sqrt[3]{4}\cdot x+2\cdot\sqrt[3]{2}\right).$

8.

Zadatak 806 (Ivana, ekonomska škola)

Izračunati $\frac{x^2+y^2}{x\cdot y}-\frac{x^2}{x\cdot y+y^2}-\frac{y^2}{x^2+x\cdot y}.$

$A.\ 0 \qquad B.\ x \qquad C.\ y \qquad D.\ 1$

Rješenje 806

Ponovimo!

$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\frac{x^2+y^2}{x\cdot y}-\frac{x^2}{x\cdot y+y^2}-\frac{y^2}{x^2+x\cdot y}=\frac{x^2+y^2}{x\cdot y}-\frac{x^2}{y\cdot(x+y)}-\frac{y^2}{x\cdot(x+y)}=$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot(x+y)-x^3-y^3}{x\cdot y\cdot(x+y)}=\frac{x^3+x^2\cdot y+x\cdot y^2+y^3-x^3-y^3}{x\cdot y\cdot(x+y)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2\cdot y+x\cdot y^2+y^3-x^3-y^3}{x\cdot y\cdot(x+y)}=\frac{x^2\cdot y+x\cdot y^2}{x\cdot y\cdot(x+y)}=\frac{x\cdot y\cdot(x+y)}{x\cdot y\cdot(x+y)}=\frac{x\cdot y\cdot(x+y)}{x\cdot y\cdot(x+y)}=1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 806

Izračunati $\frac{x^2+y^2}{x\cdot y}-\left(\frac{x^2}{x\cdot y+y^2}+\frac{y^2}{x^2+x\cdot y}\right).$

$A.\ 0 \qquad B.\ x \qquad C.\ y \qquad D.\ 1$

Rezultat: D.

9.

Zadatak 098 (Marijan, tehnička škola)

Riješi nejednadžbu $|x| > x.$

Rješenje 098

Ponovimo!

$$a > b\ ,\ c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Preoblikujemo nejednadžbu.

$$|x| > x \Rightarrow |x| - x > 0.$$

Prvi slučaj

$$|x| - x > 0 \Rightarrow [x \geq 0] \Rightarrow x - x > 0 \Rightarrow x - x > 0 \Rightarrow 0 > 0.$$

Nema rješenja.
Drugi slučaj

$$|x| - x > 0 \Rightarrow [x < 0] \Rightarrow -x - x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \ /:(-2) \Rightarrow x < 0.$$

Rješenje je

$$x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$$

Vježba 098

Riješi nejednadžbu $|x| < x.$

Rezultat: Nema rješenja.

10.

Zadatak 489 (Zdravko, srednja škola)

Dokaži nejednakost $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},$ za svaki prirodni broj $n \geq 2$.

Rješenje 489

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n \cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \ , \ a \geq 0 \quad , \quad a>b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ a \cdot c>b \cdot c.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a \cdot d+b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad , \quad a>b>0 \ \Rightarrow \ a^2>b^2.$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}=\sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}=\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad , \quad a \cdot b+a \cdot c=a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 2

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2} \ \Rightarrow \ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2} \ / \cdot \sqrt{2} \ \Rightarrow \ \sqrt{2}+1>\left(\sqrt{2}\right)^2 \ \Rightarrow \ \sqrt{2}+1>2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{2}>2-1 \ \Rightarrow \ \sqrt{2}>1 \ \Rightarrow \ \sqrt{2}>1 \ /^2 \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{2}\right)^2>1^2 \ \Rightarrow \ 2>1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena jer smo dobili točnu nejednakost.
korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \ - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{induktivna \ pretpostavka}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Treba dokazati da vrijedi

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}.$$

Pokažimo to na više načina.

1.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}}\ \ldots\left[\sqrt{n^2+n}>n\right]\ldots$$

$$>\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$

2.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}+\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\sqrt{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{n+1}\ \ldots\left[\sqrt{n^2+n}>n\right]\ldots>\sqrt{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\sqrt{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\sqrt{n+1}.$$

3.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}>\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$

4.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}\ /\cdot\sqrt{n+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1>\left(\sqrt{n+1}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{n\cdot(n+1)}+1>n+1\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}+1>n+1\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}>n\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}>n\ /^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{n^2+n}\right)^2>n^2\ \Rightarrow\ n^2+n>n^2\ \Rightarrow\ n^2+n>n^2\ \Rightarrow\ n>0.$$

Dobili smo točnu nejednakost. Pretpostavka

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$$

je istinita.

Vježba 489

Odmor!

Rezultat: …