

Zadnjih deset zadataka

I.

Zadatak 078 (1 A + Mihaela ☺, HTT)

$$\text{Riješi jednađbu: } \frac{3 \cdot x + 8}{2 \cdot x - 1} = 3.$$

Rješenje 078

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Opći oblik linearne jednađbe glasi:

$$a \cdot x = b, \quad a, b \in R.$$

Moguća su tri slučaja.

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \text{ rješenje jednađbe}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a = 0, b \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \cdot x = b \text{ jednađba nema rješenja}$$

Ne postoji broj koji bi pomnožen s nulom dao broj različit od nule.

$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a = 0, b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \text{ jednađba je neodređena}$$

Ima beskonačno mnogo rješenja, tj. jednakost je ispunjena za svako $x \in R$.

$$\frac{3 \cdot x + 8}{2 \cdot x - 1} = 3.$$

Diskusija

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost nepoznanice x za koje je nazivnik jednak nuli.

$$2 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x = 1 \Rightarrow 2 \cdot x = 1 \quad /: 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}.$$

Rješenje naše jednađbe ne može biti $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot x + 8}{2 \cdot x - 1} = 3 &\Rightarrow \frac{3 \cdot x + 8}{2 \cdot x - 1} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{3 \cdot x + 8}{2 \cdot x - 1} = \frac{3}{1} \quad / \cdot (2 \cdot x - 1) \Rightarrow 3 \cdot x + 8 = 3 \cdot (2 \cdot x - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cdot x + 8 = 6 \cdot x - 3 \Rightarrow 3 \cdot x - 6 \cdot x = -3 - 8 \Rightarrow -3 \cdot x = -11 \Rightarrow -3 \cdot x = -11 \quad /: (-3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{11}{3} \Rightarrow x = 3 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Vježba 078

Riješi jednađbu: $\frac{2 \cdot x - 1}{3 \cdot x + 8} = \frac{1}{3}$.

Rezultat: $\frac{11}{3}$.

www.halapa.com

II.

Zadatak 223 (Ante, srednja škola)

Ako je $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ i $\sin t = 0.6$, koliko je $\cos t$?

- A. -0.8 B. -0.4 C. 0.4 D. 0.8

Rješenje 223

Ponovimo!

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-

$$\begin{aligned} \cos^2 t + \sin^2 t = 1 &\Rightarrow \cos^2 t = 1 - \sin^2 t \Rightarrow \cos^2 t = 1 - \sin^2 t \quad / \sqrt{} \Rightarrow \cos t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \right. &\Rightarrow \cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t} \Rightarrow \cos t = -\sqrt{1 - 0.6^2} \Rightarrow \cos t = -\sqrt{1 - 0.36} \Rightarrow \\ \left. \text{drugi kvadrant} \right] &\Rightarrow \cos t = -\sqrt{0.64} \Rightarrow \cos t = -0.8. \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 223

Ako je $t \in \left\langle \frac{3 \cdot \pi}{2}, 2 \cdot \pi \right\rangle$ i $\sin t = -0.6$, koliko je $\cos t$?

- A. -0.8 B. -0.4 C. 0.4 D. 0.8

Rezultat: D.

III.

Zadatak 078 (Tin, srednja škola)

Plastična posuda oblika kvadra napunjena je vodom. Stranice su duljine 25 cm, 20 cm i 18 cm. Koliko je litara vode u posudi? (1 litra = 1 dm³)

- A. 90 litara B. 16.2 litre C. 9 litara D. 1.62 litre

Rješenje 078

Ponovimo!

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \quad , \quad 1 \text{ litra} = 1 \text{ dm}^3.$$

Kvadar je uspravna prizma kojoj je baza pravokutnik. Ako su a, b i c duljine bridova kvadra iz jednog vrha, obujam kvadra jednak je

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 25 \text{ cm} \\ b = 20 \text{ cm} \\ c = 18 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 2.5 \text{ dm} \\ b = 2.0 \text{ dm} \\ c = 1.8 \text{ dm} \end{array} \right\} \Rightarrow [V = a \cdot b \cdot c] \Rightarrow V = 2.5 \text{ dm} \cdot 2.0 \text{ dm} \cdot 1.8 \text{ dm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 9 \text{ dm}^3 \Rightarrow V = 9 \text{ litara}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 078

Plastična posuda oblika kvadra napunjena je vodom. Stranice su duljine 50 cm, 10 cm i 18 cm. Koliko je litara vode u posudi? (1 litra = 1 dm³)

- A. 90 litara B. 16.2 litre C. 9 litara D. 1.62 litre

Rezultat: C.

IV.

Zadatak 079 (Lana, srednja škola)

Koliki je obujam kvadra ako mu je zadana duljina jednog brida $a = 4.5$ cm, duljina dijagonale baze $d = 7.9$ cm i kut $\varphi = 28^\circ 38'$ koji prostorna dijagonala zatvara s bazom kvadra?

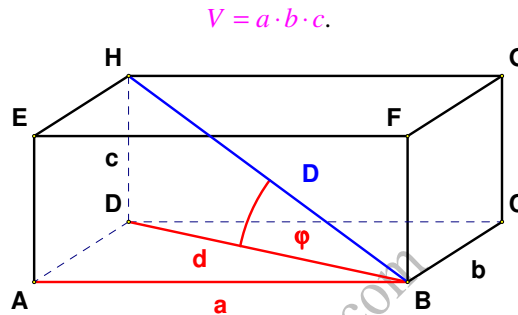
Rješenje 079

Ponovimo!

Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz kut.

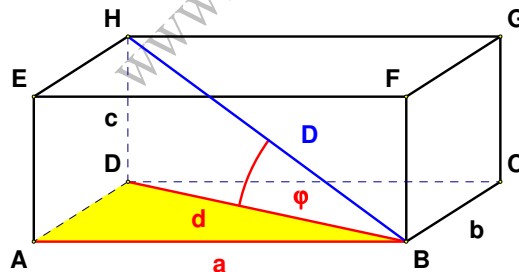
Kvadar je uspravna prizma kojoj je baza pravokutnik. Kvadar ima 8 vrhova, 12 bridova i 6 strana. Sve strane kvadra su pravokutnici. Ako su a , b i c duljine bridova kvadra iz jednog vrha, obujam kvadra jednak je.



Sa slike vidi se:

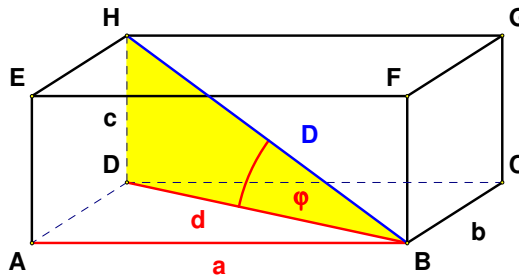
$$|AB| = |EF| = |DC| = |HG| = a, \quad |BC| = |AD| = |FG| = |EH| = b$$

$$|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = c, \quad |BD| = d, \quad |BH| = D, \quad \angle(DG, BH) = \varphi$$



Uočimo pravokutan trokut $\triangle ABD$ kojemu su duljine kateta bridovi kvadra a i b , a duljina hipotenuze duljina dijagonale baze d . Uporabom Pitagorina poučka dobije se duljina brida b .

$$b^2 = d^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = d^2 - a^2 \quad / \sqrt{} \Rightarrow b = \sqrt{d^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{(7.9 \text{ cm})^2 - (4.5 \text{ cm})^2} \Rightarrow b = 6.5 \text{ cm}.$$



Uočimo pravokutan trokut $\triangle DBH$ kojemu su duljine kateta brid kvadra c i duljina dijagonale baze d .

Pomoću funkcije tangens dobije se duljina brida c .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|DH|}{|BD|} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{d} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{d} \cdot d \Rightarrow c = d \cdot \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow c = 7.9 \text{ cm} \cdot \operatorname{tg} 28^{\circ} 38' \Rightarrow c = 4.3 \text{ cm}.$$

Obujam kvadra iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a = 4.5 \text{ cm} \\ b = 6.5 \text{ cm} \\ c = 4.3 \text{ cm} \\ V = a \cdot b \cdot c \end{array} \right\} \Rightarrow V = 4.5 \text{ cm} \cdot 6.5 \text{ cm} \cdot 4.3 \text{ cm} \Rightarrow V = 125.8 \text{ cm}^3.$$

Vježba 079

Koliki je obujam kvadra ako mu je zadana duljina jednog brida $a = 45 \text{ mm}$, duljina dijagonale baze $d = 79 \text{ mm}$ i kut $\varphi = 28^{\circ} 38'$ koji prostorna dijagonala zatvara s bazom kvadra?

Rezultat: 125800 mm^3 .



Zadatak 390 (Tonka, srednja škola)

Odredite s ako je $t = \frac{s+r}{s-r}$ ($s \neq r$, $t \neq 1$).

Rješenje 390

Ponovimo!
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\begin{aligned} t = \frac{s+r}{s-r} &\Rightarrow t = \frac{s+r}{s-r} \cdot (s-r) \Rightarrow t \cdot (s-r) = s+r \Rightarrow t \cdot s - t \cdot r = s+r \Rightarrow \\ &\Rightarrow t \cdot s - s = r + t \cdot r \Rightarrow s \cdot (t-1) = r \cdot (1+t) \Rightarrow s \cdot (t-1) = r \cdot (1+t) \cdot \frac{1}{t-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow s = \frac{r \cdot (1+t)}{t-1} \Rightarrow s = \frac{r \cdot (t+1)}{t-1}. \end{aligned}$$

Vježba 390

Odredite r ako je $t = \frac{s+r}{s-r}$ ($s \neq r$, $t \neq -1$).

Rezultat: $r = \frac{s \cdot (t-1)}{t+1}.$

www.halapa.com

VI.

Zadatak 388 (Dvije maturantice, gimnazija)

Ako je $(a+b\cdot\sqrt{2})^2 = 9+4\cdot\sqrt{2}$, onda je:

- A. $a\cdot b = 6$ B. $a\cdot b = 4$ C. $a\cdot b = 3$ D. $a\cdot b = 2$

Rješenje 388

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad (a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2.$$
$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b, \quad a, b > 0.$$

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

1. inačica

$$(a+b\cdot\sqrt{2})^2 = 9+4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{nadopunjavanje na} \\ \text{potpuni kvadrat} \end{array} \right] \Rightarrow (a+b\cdot\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{2} + (2\cdot\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a+b\cdot\sqrt{2})^2 = (1+2\cdot\sqrt{2})^2 \Rightarrow a+b\cdot\sqrt{2} = 1+2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \end{array} \right\} \Rightarrow a\cdot b = 1\cdot 2 \Rightarrow a\cdot b = 2.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

$$(a+b\cdot\sqrt{2})^2 = 9+4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{2} + (b\cdot\sqrt{2})^2 = 9+4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{2} + 2\cdot b^2 = 9+4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow (a^2 + 2\cdot b^2) + 2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{2} = 9+4\cdot\sqrt{2}.$$

Iz definicije jednakosti polinoma slijedi:

$$2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow 2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2} \quad / \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow a\cdot b = 2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 388

Ako je $(a+b\cdot\sqrt{2})^2 = 9+4\cdot\sqrt{2}$, onda je:

- A. $a+b = 6$ B. $a+b = 4$ C. $a+b = 3$ D. $a+b = 2$

Rezultat: C.

VII.

Zadatak 389 (Dvije maturantice, gimnazija)

Koji od sljedećih dvočlanih izraza nije faktor polinoma $a^6 - b^6$?

A. $a^2 - b^2$ B. $a^2 + b^2$ C. $a - b$ D. $a^2 - a \cdot b + b^2$

Rješenje 389

Ponovimo!

$$x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y) \quad , \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad x^3 - y^3 = (x-y) \cdot (x^2 + x \cdot y + y^2).$$

$$x^3 + y^3 = (x+y) \cdot (x^2 - x \cdot y + y^2).$$

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3) \cdot (a^3 + b^3) = \\ &= (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2). \end{aligned}$$

Diskusija

A. $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ je faktor zadanog polinoma

$$a^6 - b^6 = (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$$

B. $a^2 + b^2$ nije faktor zadanog polinoma

$$a^6 - b^6 = (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$$

C. $a - b$ je faktor zadanog polinoma

$$a^6 - b^6 = (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$$

D. $a^2 - a \cdot b + b^2$ je faktor zadanog polinoma

$$a^6 - b^6 = (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$$

Odgovor je pod B.

Vježba 389

Koji od sljedećih dvočlanih izraza nije faktor polinoma $a^6 - b^6$?

A. $a^3 - b^3$ B. $a^3 + b^3$ C. $a + 3$ D. $a^2 + a \cdot b + b^2$

Rezultat: C.

VIII.

Zadatak 077 (Ana, strukovna škola)

Formulom $T(t) = -0.4 \cdot t + 22$ prikazana je veza temperature u ledenici i vremena koje je proteklo od njezinoga uključivanja. Pritom je temperatura T izražena u $^{\circ}\text{C}$, a vrijeme t u minutama.

a) Kolika je temperatura u ledenici pola sata nakon uključjenja?

b) Nakon koliko je minuta poslije uključjenja termometar u ledenici izmjerio 0°C ?

Rješenje 077

Ponovimo!

Opći oblik linearne jednačbe glasi:

$$a \cdot x = b, \quad a, b \in R.$$

Moguća su tri slučaja.

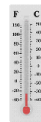
$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \quad \text{rješenje jednačbe}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a = 0, \quad b \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \cdot x = b \quad \text{jednačba nema rješenja}$$

Ne postoji broj koji bi pomnožen s nulom dao broj različit od nule.

$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a = 0, \quad b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \quad \text{jednačba je neodređena}$$

Ima beskonačno mnogo rješenja, tj. jednakost je ispunjena za svako $x \in R$.



a)

Računamo temperaturu T u ledenici pola sata nakon uključjenja.

$$\left. \begin{array}{l} T(t) = -0.4 \cdot t + 22 \\ t = \frac{1}{2} \text{ h} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T(t) = -0.4 \cdot t + 22 \\ t = 30 \text{ min} \end{array} \right\} \Rightarrow T(t) = -0.4 \cdot 30 + 22 \Rightarrow \\ \Rightarrow T(t) = -12 + 22 \Rightarrow T(t) = 10^{\circ}\text{C}.$$

b)

Računamo nakon koliko je minuta t poslije uključjenja termometar u ledenici izmjerio 0°C ?

$$\left. \begin{array}{l} T(t) = -0.4 \cdot t + 22 \\ T(t) = 0^{\circ}\text{C} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -0.4 \cdot t + 22 \Rightarrow 0.4 \cdot t = 22 \Rightarrow 0.4 \cdot t = 22 \quad /: 0.4 \Rightarrow t = 55 \text{ min.}$$

Vježba 077

Formulom $T(t) = -0.4 \cdot t + 22$ prikazana je veza temperature u ledenici i vremena koje je proteklo od njezinoga uključivanja. Pritom je temperatura T izražena u $^{\circ}\text{C}$, a vrijeme t u minutama. Kolika je temperatura u ledenici sat nakon uključjenja?

Rezultat: -2°C .

IX.

Zadatak 257 (Ana, hotelijerska škola)

Riješi eksponencijalnu jednačbu: $100^{2-5 \cdot x} = \sqrt{1000}$.

Rješenje 257

Ponovimo!

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\begin{aligned} 100^{2-5 \cdot x} = \sqrt{1000} &\Rightarrow (10^2)^{2-5 \cdot x} = \sqrt{10^3} \Rightarrow 10^{4-10 \cdot x} = 10^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 4-10 \cdot x = \frac{3}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4-10 \cdot x = \frac{3}{2} / \cdot 2 \Rightarrow 8-20 \cdot x = 3 \Rightarrow -20 \cdot x = 3-8 \Rightarrow -20 \cdot x = -5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -20 \cdot x = -5 / : (-20) \Rightarrow x = \frac{5}{20} \Rightarrow x = \frac{5}{20} \Rightarrow x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vježba 257

Riješi eksponencijalnu jednačbu: $100^{2+5 \cdot x} = \sqrt{1000}$.

Rezultat: $x = -\frac{1}{4}$.



Zadatak 077 (Ante, maturant)

Zadana je pravilna četverostrana piramida kojoj duljine svih bridova iznose a cm. Kolika je mjera kuta između baze (osnovke) i strane (pobočke)?

- A. $35^{\circ} 15' 52''$ B. $45^{\circ} 27' 12''$ C. $54^{\circ} 44' 08''$ D. $60^{\circ} 12' 06''$

Rješenje 077

Ponovimo!

Piramida je tijelo omeđeno mnogokutima: osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Četverostrana je piramida pravilna ako je baza kvadrat, a visina prolazi kroz središte kvadrata.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

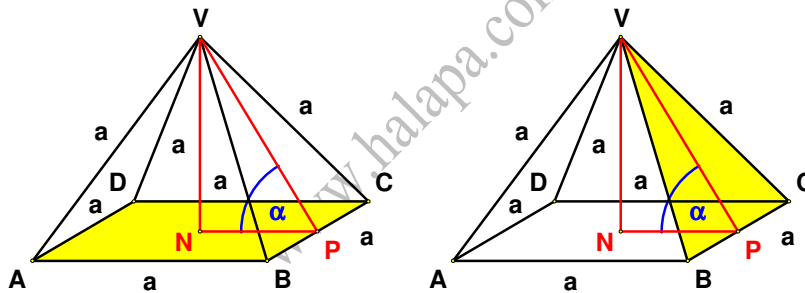
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake. Duljina visine jednakostraničnog trokuta čija je duljina stranice a iznosi:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

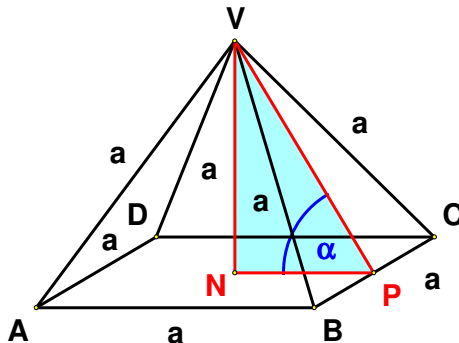


Sa slika vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |VA| = |VB| = |VC| = |VD| = a, \quad |NP| = \frac{a}{2}, \quad |VP| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \angle(NP, VP)$$

Baza (osnovka) piramide ABCDV je kvadrat ABCD pri čemu je N njegovo središte. Strane (pobočke) piramide su jednakostranični trokuti $\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$ i $\triangle VDA$. Uočimo da je kut α između osnovke ABCD i pobočke VBC jednak kutu između pravaca NP i VP.



Traženi kut lako pronalazimo pomoću pravokutnog trokuta $\triangle VNP$ gdje je $|NP|$ duljina njegove

katete, a $|VP|$ duljina hipotenuze. Mjera kuta iznosi:

$$\cos \alpha = \frac{|NP|}{|VP|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \alpha = 54^{\circ} 44' 08''.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 077

Zadana je pravilna četverostrana piramida kojoj duljine svih bridova iznose 13 cm. Kolika je mjera kuta između baze (osnovke) i strane (pobočke)?

- A. $35^{\circ} 15' 52''$ B. $45^{\circ} 27' 12''$ C. $54^{\circ} 44' 08''$ D. $60^{\circ} 12' 06''$

Rezultat: C.