1.

Zadatak 141 (Darko, ekonomska škola)

Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine manjeg kruga. Omjer polumjera većeg i manjeg kruga jednak je:

$$A.\ \sqrt{5}:2 \qquad B.\ 4:1 \qquad C.\ 5:2 \qquad D.\ 3:1$$

Rješenje 141

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (kvocijent) omjera.

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^2\cdot\pi.$$

Ako su u ravnini zadana dva koncentrična kruga (imaju zajedničko središte), manji krug polumjera r i veći polumjera R, tada se skup svih točaka ravnine koje pripadaju većem krugu, a ne pripadaju unutrašnjosti manjeg kruga zove kružni vijenac.
Ploština kružnog vijenca izračunava se po formuli

$$P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi,$$

gdje je R > r.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi=\frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi \Rightarrow \left(R^2-r^2\right)\cdot\pi=\frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi \ /\cdot\frac{4}{\pi} \Rightarrow 4\cdot\left(R^2-r^2\right)=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot R^2-4\cdot r^2=r^2 \Rightarrow 4\cdot R^2=r^2+4\cdot r^2 \Rightarrow 4\cdot R^2=5\cdot r^2 \Rightarrow 4\cdot R^2=5\cdot r^2 \ /\cdot\frac{1}{4\cdot r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{r^2}=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{5}{4} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow \frac{R}{r}=\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ R : r = \sqrt{5} : 2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 141

Površina kružnog vijenca jednaka je polovini površine manjeg kruga. Omjer polumjera većeg i manjeg kruga jednak je:

$A.\ \sqrt{3} : \sqrt{2}$ $B.\ \sqrt{3} : 2$ $C.\ 3 : \sqrt{2}$ $D.\ 3 : 2$

Rezultat: A.

2.

Zadatak 510 (Helena, ekonomska škola)

Riješite jednadžbu $(\sin(x)-\cos(x))^2=\sin(2\cdot x)$.

Rješenje 510

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \quad , \quad \sin(2\cdot x)=2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x).$$

$$a-\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c-b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Trigonometrijska jednadžba $\sin x=a \; , \; |a|\le 1$

Skup rješenja jednadžbe $\sin x=a,\ |a|\le 1,$ je $\{x_\circ+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}\cup\{\pi-x_\circ+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}$

gdje je $x_\circ\in R$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$(\sin(x)-\cos(x))^2=\sin(2\cdot x) \Rightarrow \sin^2(x)-2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+\cos^2(x)=\sin(2\cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=\sin(2\cdot x) \Rightarrow 1-\sin(2\cdot x)=\sin(2\cdot x) \Rightarrow 1=\sin(2\cdot x)+\sin(2\cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=2\cdot\sin(2\cdot x) \Rightarrow 2\cdot\sin(2\cdot x)=1 \Rightarrow 2\cdot\sin(2\cdot x)=1 \; /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2\cdot x)=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{zamjena}\\ 2\cdot x=t\end{matrix}\right] \Rightarrow \sin(t)=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$  $$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \\ t_2=\pi-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \\ t_2=\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni.

- $$\left.\begin{matrix} t=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \\ 2\cdot x=t \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \Rightarrow 2\cdot x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \; /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{12}+k\cdot\pi \quad , \quad k\in Z$$

- $$\left.\begin{matrix} t=\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \\ 2\cdot x=t \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot x=\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \Rightarrow 2\cdot x=\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \; /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot\pi \quad , \quad k\in Z.$$

Vježba 510

Odmor!

Rezultat: …

3.

Zadatak 509 (Štrumf, maturant)

Zbroj najmanje i najveće vrijednosti funkcije $f(x) = 3 \cdot \sin^2(x) + 5 \cdot \cos^2(x)$ iznosi:

$A.\ 3 \qquad B.\ 5 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 7$

Rješenje 509

Ponovimo!

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Za funkcije $\sin(x)$ i $\cos(x)$ vrijedi:

$$-1 \le \sin(x) \le 1 \quad , \quad -1 \le \cos(x) \le 1 \ , \ x \in R.$$

Za funkcije $\sin^2(x)$ i $\cos^2(x)$ vrijedi:

$$0 \le \sin^2(x) \le 1 \quad , \quad 0 \le \cos^2(x) \le 1 \ , \ x \in R.$$

1.inačica

Funkcija $f(x) = 3 \cdot \sin^2(x) + 5 \cdot \cos^2(x)$ ima:

- najmanju vrijednost

$$3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

- najveću vrijednost

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 3 + 5 = 8.$$

Zbroj najmanje i najveće vrijednosti funkcije f je

$$0 + 8 = 8.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x) = 3 \cdot \sin^2(x) + 5 \cdot \cos^2(x) \ \Rightarrow \ f(x) = 3 \cdot \left(1 - \cos^2(x)\right) + 5 \cdot \cos^2(x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f(x) = 3 - 3 \cdot \cos^2(x) + 5 \cdot \cos^2(x) \ \Rightarrow \ f(x) = 3 + 2 \cdot \cos^2(x).$$

Funkcija $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos^2(x)$ ima:

- najmanju vrijednost za $\cos^2(x) = 0$ i ona iznosi

$$3 + 2 \cdot 0 = 3 + 0 = 3$$

- najveću vrijednost za $\cos^2(x) = 1$ i ona iznosi

$$3 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5.$$

Zbroj najmanje i najveće vrijednosti funkcije f je

$$3 + 5 = 8.$$

Odgovor je pod C.

3.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=3\cdot\sin^2(x)+5\cdot\cos^2(x) \Rightarrow f(x)=3\cdot\sin^2(x)+5\cdot\left(1-\sin^2(x)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=3\cdot\sin^2(x)+5-5\cdot\sin^2(x) \Rightarrow f(x)=5-2\cdot\sin^2(x).$$

Funkcija $f(x)=5-2\cdot\sin^2(x)$ ima:

- najmanju vrijednost za $\sin^2(x)=1$ i ona iznosi
$$5-2\cdot 1=5-2=3$$
- najveću vrijednost za $\sin^2(x)=0$ i ona iznosi
$$5-2\cdot 0=5-0=5.$$

Zbroj najmanje i najveće vrijednosti funkcije f je
$$3+5=8.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 509

Zbroj najmanje i najveće vrijednosti funkcije $f(x)=2\cdot\sin^2(x)+5\cdot\cos^2(x)$ iznosi:

$A.\ 3$ $B.\ 5$ $C.\ 8$ $D.\ 7$

Rezultat: D.

4.

Zadatak 903 (Lily, gimnazija)

Pojednostavnite: $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\right):\dfrac{a-b-c}{a\cdot b\cdot c}.$

Rješenje 903

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\right):\frac{a-b-c}{a\cdot b\cdot c}=\frac{\frac{b+c-a}{a\cdot(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a\cdot(b+c)}}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\right)\cdot\frac{a\cdot b\cdot c}{a-b-c}=$$

$$=\frac{\frac{b+c-a}{a\cdot(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a\cdot(b+c)}}\cdot\frac{2\cdot b\cdot c+b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\cdot\frac{a\cdot b\cdot c}{a-b-c}=\frac{\frac{b+c-a}{1}}{\frac{b+c+a}{1}}\cdot\frac{b^2+2\cdot b\cdot c+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{a}{a-b-c}=$$

$$=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2}\cdot\frac{a}{a-b-c}=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{(b+c-a)\cdot(b+c+a)}{2}\cdot\frac{a}{a-b-c}=$$

$$=\frac{-(a-b-c)}{b+c+a}\cdot\frac{(b+c-a)\cdot(b+c+a)}{2}\cdot\frac{a}{a-b-c}=\frac{-(a-b-c)}{b+c+a}\cdot\frac{(b+c-a)\cdot(b+c+a)}{2}\cdot\frac{a}{a-b-c}=$$

$$=\frac{-1}{1}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a}{1}=\frac{a-b-c}{2}\cdot\frac{a}{1}=\frac{a}{2}\cdot(a-b-c).$$

Vježba 903

Odmor!

Rezultat: …

5.

Zadatak 904 (Lily, gimnazija)

Ako je $I(a, b)=\frac{a^2-a\cdot b}{a^2-b^2}+\frac{b^2-1}{a\cdot b-a+b^2-b}$, izračunajte $I(3, 2)\cdot I(4, 2)$.

Rješenje 904

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

Preoblikujemo izraz I.

$$I(a, b)=\frac{a^2-a\cdot b}{a^2-b^2}+\frac{b^2-1}{a\cdot b-a+b^2-b} \Rightarrow I(a, b)=\frac{a\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(a+b)}+\frac{(b-1)\cdot(b+1)}{a\cdot(b-1)+b\cdot(b-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(a, b)=\frac{a\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(a+b)}+\frac{(b-1)\cdot(b+1)}{(b-1)\cdot(a+b)} \Rightarrow I(a, b)=\frac{a}{a+b}+\frac{(b-1)\cdot(b+1)}{(b-1)\cdot(a+b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(a, b)=\frac{a}{a+b}+\frac{b+1}{a+b} \Rightarrow I(a, b)=\frac{a+b+1}{a+b}.$$

Sada je:

$$I(3, 2)\cdot I(4, 2)=\left[\, I(a, b)=\frac{a+b+1}{a+b} \,\right]=\frac{3+2+1}{3+2}\cdot\frac{4+2+1}{4+2}=\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{5}.$$

Vježba 904

Odmor!

Rezultat: …

6.

Zadatak 323 (Nik7, maturant)

Dan je polinom $f(x) = a \cdot x^2 + x + 1$. Za svaki realni broj x pritom vrijedi $f(1-x) = f(1+x)$. Umnožak nultočaka funkcije f jednak je:

$A. -1 \qquad B. -2 \qquad C. -3 \qquad D. -4$

Rješenje 323

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_\circ) = 0.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Najprije izračunamo koeficijent a iz zadanog uvjeta.

$$f(1-x) = f(1+x) \Rightarrow \left[f(x) = a \cdot x^2 + x + 1 \right] \Rightarrow a \cdot (1-x)^2 + 1 - x + 1 = a \cdot (1+x)^2 + 1 + x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (1-x)^2 + 1 - x + 1 = a \cdot (1+x)^2 + 1 + x + 1 \Rightarrow a \cdot (1-x)^2 - x = a \cdot (1+x)^2 + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \left(1 - 2 \cdot x + x^2\right) - x = a \cdot \left(1 + 2 \cdot x + x^2\right) + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 2 \cdot a \cdot x + a \cdot x^2 - x = a + 2 \cdot a \cdot x + a \cdot x^2 + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 2 \cdot a \cdot x + a \cdot x^2 - x = a + 2 \cdot a \cdot x + a \cdot x^2 + x \Rightarrow -2 \cdot a \cdot x - x = 2 \cdot a \cdot x + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot a \cdot x - x - 2 \cdot a \cdot x - x = 0 \Rightarrow -4 \cdot a \cdot x - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow -4 \cdot a \cdot x - 2 \cdot x = 0 \; / : (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot x + x = 0 \Rightarrow x \cdot (2 \cdot a + 1) = 0.$$

Budući da za svaki realni broj x vrijedi $x \cdot (2 \cdot a + 1) = 0$, slijedi:

$$\Rightarrow\ 2\cdot a+1=0\ \Rightarrow\ 2\cdot a=-1\ \Rightarrow\ 2\cdot a=-1\ /\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ a=-\frac{1}{2}.$$

Funkcija glasi:

$$f(x)=a\cdot x^2+x+1\ \Rightarrow\ \left[a=-\frac{1}{2}\right]\ \Rightarrow\ f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2+x+1.$$

Umnožak nultočaka funkcije f računamo pomoću Vièteove formule.

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2+x+1\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2+x+1 \\ a=-\frac{1}{2}\ ,\ b=1\ ,\ c=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\right]\ \Rightarrow\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{-\frac{1}{2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_1\cdot x_2=-2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 323

Odmor!

Rezultat: …

7.

Zadatak 266 (Tea, srednja škola)

Jedno rješenje jednadžbe $(a\cdot x-1)\cdot(x-a)=0$ jednako je – 1. Drugo rješenje jednadžbe je:

$A.\ -1 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ -3$

Rješenje 266

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^2=0 \Rightarrow a=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Rješenje x = – 1 uvrstimo u jednadžbu kako bismo odredili a.

$$(a\cdot x-1)\cdot(x-a)=0 \Rightarrow [x=-1] \Rightarrow (a\cdot(-1)-1)\cdot(-1-a)=0 \Rightarrow (-a-1)\cdot(-a-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-(a+1))\cdot(-(a+1))=0 \Rightarrow (a+1)\cdot(a+1)=0 \Rightarrow (a+1)^2=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1.$$

Jednadžba glasi:

$$(a\cdot x-1)\cdot(x-a)=0 \Rightarrow [a=-1] \Rightarrow (-1\cdot x-1)\cdot(x-(-1))=0 \Rightarrow (-x-1)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x+1)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow -(x+1)^2=0 \Rightarrow -(x+1)^2=0\ /\cdot(-1) \Rightarrow (x+1)^2=0.$$

Jednadžba je kvadratna i ima dvostruko realno rješenje x = – 1.

$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=-1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 266

Odmor!

Rezultat: …

8.

Zadatak 619 (Darko, ekonomska škola)

Ako je $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10$ i $\sqrt{x^2-y^2}=9,$ onda je:

$A.\ x=9$ $\quad B.\ x=20$ $\quad C.\ x=99$ $\quad D.\ x=41$

Rješenje 619

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10 \Rightarrow \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)^2=10^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+y}\right)^2+2\cdot\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x-y}+\left(\sqrt{x-y}\right)^2=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+2\cdot\sqrt{(x+y)\cdot(x-y)}+x-y=100 \Rightarrow x+y+2\cdot\sqrt{(x+y)\cdot(x-y)}+x-y=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot\sqrt{x^2-y^2}+x=100 \Rightarrow 2\cdot x+2\cdot\sqrt{x^2-y^2}=100 \Rightarrow 2\cdot x+2\cdot\sqrt{x^2-y^2}=100\ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x^2-y^2}=50 \Rightarrow \left[\sqrt{x^2-y^2}=9\right] \Rightarrow x+9=50 \Rightarrow x=50-9 \Rightarrow x=41.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 619

Ako je $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=10$ i $\sqrt{x^2-y^2}=9,$ onda je:

$A.\ x=19$ $\quad B.\ x=20$ $\quad C.\ x=59$ $\quad D.\ x=18$

Rezultat: C.

9.

Zadatak 507 (Laura, srednja škola)

Ako je $tg(x)+ctg(x)=m$, onda je $tg^3(x)+ctg^3(x)$ jednako:

$A.\ m\cdot(m-3) \qquad B.\ m^2-3 \qquad C.\ m^3-1 \qquad D.\ m^3-3\cdot m$

Rješenje 507

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad tg(x)\cdot ctg(x)=1.$$

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right) \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Zadanu jednadžbu kvadriramo.

$$tg(x)+ctg(x)=m \Rightarrow tg(x)+ctg(x)=m \ /^2 \Rightarrow (tg(x)+ctg(x))^2=m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2(x)+2\cdot tg(x)\cdot ctg(x)+ctg^2(x)=m^2 \Rightarrow tg^2(x)+2\cdot 1+ctg^2(x)=m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2(x)+2+ctg^2(x)=m^2 \Rightarrow tg^2(x)+ctg^2(x)=m^2-2.$$

Konačno imamo:

$$tg^3(x)+ctg^3(x)=(tg(x)+ctg(x))\cdot\left(tg^2(x)-tg(x)\cdot ctg(x)+ctg^2(x)\right)=$$

$$=(tg(x)+ctg(x))\cdot\left(tg^2(x)-1+ctg^2(x)\right)=(tg(x)+ctg(x))\cdot\left(tg^2(x)+ctg^2(x)-1\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} tg(x)+ctg(x)=m \\ tg^2(x)+ctg^2(x)=m^2-2 \end{bmatrix}=m\cdot\left(m^2-2-1\right)=m\cdot\left(m^2-3\right)=m^3-3\cdot m.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 507

Odmor!

Rezultat: …

10.

Zadatak 508 (Luka, srednja škola)

Ako je $x+y=\frac{3\cdot\pi}{4}$, koliko je $\left(1+ctg\left(x\right)\right)\cdot\left(1+ctg\left(y\right)\right)$?

$A.\ 2 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ -1$

Rješenje 508

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{a}=a \quad , \quad ctg\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=-1.$$

$$ctg\left(x+y\right)=\frac{ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)-1}{ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)} \quad , \quad ctg\left(x-y\right)=\frac{ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)+1}{ctg\left(y\right)-ctg\left(x\right)}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Množenje zagrada

$$\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$ctg\left(x+y\right)=\frac{ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)-1}{ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)} \Rightarrow \left[x+y=\frac{3\cdot\pi}{4}\right] \Rightarrow ctg\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=\frac{ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)-1}{ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1=\frac{ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)-1}{ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)} \Rightarrow -1=\frac{ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)-1}{ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)} \ /\cdot\left(ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\cdot\left(ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)\right)=ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)-1 \Rightarrow -ctg\left(y\right)-ctg\left(x\right)=ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -ctg\left(y\right)-ctg\left(x\right)-ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)=-1 \Rightarrow -ctg\left(y\right)-ctg\left(x\right)-ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)=-1 \ /\cdot\left(-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)+ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)=1.$$

Sada imamo:

$$\left(1+ctg\left(x\right)\right)\cdot\left(1+ctg\left(y\right)\right)=1+ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)+ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)=$$

$$=1+\left(ctg\left(y\right)+ctg\left(x\right)+ctg\left(x\right)\cdot ctg\left(y\right)\right)=1+1=2.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$x+y=\frac{3\cdot\pi}{4} \Rightarrow y=\frac{3\cdot\pi}{4}-x.$$

Dalje slijedi:

$$\left(1+ctg\left(x\right)\right)\cdot\left(1+ctg\left(y\right)\right)=\left(1+ctg\left(x\right)\right)\cdot\left(1+ctg\left(\frac{3\cdot\pi}{4}-x\right)\right)=$$

$$=\left(1+ctg\left(x\right)\right)\cdot\left(1+\frac{ctg\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\cdot ctg\left(x\right)+1}{ctg\left(x\right)-ctg\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)}\right)=\left(1+ctg\left(x\right)\right)\cdot\left(1+\frac{-1\cdot ctg\left(x\right)+1}{ctg\left(x\right)-\left(-1\right)}\right)=$$

$$=\left(1+ctg\left(x\right)\right)\cdot\left(1+\frac{-ctg\left(x\right)+1}{ctg\left(x\right)+1}\right)=1+ctg\left(x\right)-ctg\left(x\right)+1=1+ctg\left(x\right)-ctg\left(x\right)+1=2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 508

Odmor!

Rezultat: …