1.

Zadatak 214 (Vox, gimnazija)

Ako koeficijenti jednadžbe $x^2 + p \cdot x + q = 0$ i $x^2 + m \cdot x + n = 0$ zadovoljavaju uvjet $m \cdot p = 2 \cdot (q + n)$, dokažite da su rješenja bar jedne od njih realna.

Rješenje 214

Ponovimo!

$$a^2 \ge 0 \;,\; a \in R \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

▶

Zadanim jednadžbama odredimo njihove diskriminante:

- $$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + p \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \;,\; b = p \;,\; c = q \end{array}\right\} \Rightarrow \left[D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \right] \Rightarrow D_1 = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_1 = p^2 - 4 \cdot q$$
- $$x^2 + m \cdot x + n = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + m \cdot x + n = 0 \\ a = 1 \;,\; b = m \;,\; c = n \end{array}\right\} \Rightarrow \left[D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \right] \Rightarrow D_2 = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_2 = m^2 - 4 \cdot n.$$

Zbrajanjem D_1 i D_2 dobije se:

$$D_1 + D_2 = p^2 - 4 \cdot q + m^2 - 4 \cdot n \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 4 \cdot q - 4 \cdot n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 4 \cdot (q + n) \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot 2 \cdot (q + n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ m \cdot p = 2 \cdot (q + n) \end{array} \right] \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot m \cdot p \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 - 2 \cdot p \cdot m + m^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_1 + D_2 = (p - m)^2 \ge 0.$$

Budući da je $D_1 + D_2 \ge 0$, slijedi da je barem jedan od brojeva D_1 ili D_2 nenegativan broj. To znači da su rješenja odgovarajuće kvadratne jednadžbe realna.

Vježba 214

Odmor!

Rezultat: …

2.

Zadatak 796 (Ivan, gimnazija)

Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $x+y+z=x\cdot y\cdot z.$ Dokažite da vrijedi identitet

$$x\cdot\left(1-y^2\right)\cdot\left(1-z^2\right)+y\cdot\left(1-z^2\right)\cdot\left(1-x^2\right)+z\cdot\left(1-x^2\right)\cdot\left(1-y^2\right)=4\cdot x\cdot y\cdot z.$$

Rješenje 796

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Preoblikujemo lijevu stranu jednakosti.

$$x\cdot\left(1-y^2\right)\cdot\left(1-z^2\right)+y\cdot\left(1-z^2\right)\cdot\left(1-x^2\right)+z\cdot\left(1-x^2\right)\cdot\left(1-y^2\right)=$$

$$=x\cdot\left(1-z^2-y^2+y^2\cdot z^2\right)+y\cdot\left(1-x^2-z^2+z^2\cdot x^2\right)+z\cdot\left(1-y^2-x^2+x^2\cdot y^2\right)=$$

$$=x-x\cdot z^2-x\cdot y^2+x\cdot y^2\cdot z^2+y-y\cdot x^2-y\cdot z^2+y\cdot z^2\cdot x^2+z-z\cdot y^2-z\cdot x^2+z\cdot x^2\cdot y^2=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=(x+y+z)+\left(z\cdot x^2\cdot y^2-x^2\cdot y-x\cdot y^2\right)+\left(x\cdot y^2\cdot z^2-z^2\cdot y-z\cdot y^2\right)+$$

$$+\left(y\cdot z^2\cdot x^2-x\cdot z^2-z\cdot x^2\right)=$$

$$=(x+y+z)+x\cdot y\cdot(z\cdot x\cdot y-x-y)+y\cdot z\cdot(x\cdot y\cdot z-z-y)+x\cdot z\cdot(y\cdot z\cdot x-z-x)=$$

$$=(x+y+z)+x\cdot y\cdot(x\cdot y\cdot z-x-y)+y\cdot z\cdot(x\cdot y\cdot z-y-z)+z\cdot x\cdot(x\cdot y\cdot z-x-z)=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ x+y+z=x\cdot y\cdot z\\ z=x\cdot y\cdot z-x-y\\ x=x\cdot y\cdot z-y-z\\ y=x\cdot y\cdot z-x-z\end{bmatrix}=x\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot z+y\cdot z\cdot x+z\cdot x\cdot y=$$

$$=x\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot z=4\cdot x\cdot y\cdot z.$$

Vježba 796

Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $x+y+z=x\cdot y\cdot z.$ Dokažite da vrijedi identitet

$$x\cdot\left(y^2-1\right)\cdot\left(z^2-1\right)+y\cdot\left(z^2-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)+z\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(y^2-1\right)=4\cdot x\cdot y\cdot z.$$

Rezultat: Dokaz analogan.

3.

Zadatak 206 (Marko, ekonomska škola)

U svakoj od četiri vreće nalazila se jednaka količina riže. Ivan je iz svake od njih izvadio 9 kg riže pa je na taj način u svim vrećama zajedno ostalo toliko riže koliko je prije bilo u svakoj posebice. Koliko je riže ostalo u svakoj od vreća?

Rješenje 206

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

▶

Neka je x kg početna količina riže u svakoj vreći. U četiri vreće bilo je 4 · x kilograma riže. Budući da je Ivan iz svake vreće izvadio 9 kg riže, u svim vrećama zajedno ostalo je toliko riže koliko je prije bilo u svakoj vreći posebice. Vrijedi jednadžba:

$$4 \cdot x - 4 \cdot 9 = x \Rightarrow 4 \cdot x - 36 = x \Rightarrow 4 \cdot x - x = 36 \Rightarrow 3 \cdot x = 36 \Rightarrow 3 \cdot x = 36 \;/ : 3 \Rightarrow x = 12.$$

U svakoj vreći ostalo je 12 – 9 = 3 kg riže.

Vježba 206

U svakoj od četiri vreće nalazila se jednaka količina riže. Ivan je iz svake od njih izvadio 6 kg riže pa je na taj način u svim vrećama zajedno ostalo toliko riže koliko je prije bilo u svakoj posebice. Koliko je riže ostalo u svakoj od vreća?

Rezultat: 2 kg.

4.

Zadatak 469 (Vinko, strukovna škola)

Odredi najveći prirodni broj s kojim treba podijeliti brojeve 535 i 223 tako da ostatak u oba dijeljenja bude 7.

Rješenje 469

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prosti brojevi su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …
Ima ih beskonačno mnogo.
Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.** Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.
Zajednički djelitelj prirodnih brojeva a, b, … je svaki broj koji dijeli te brojeve.
Najveća zajednička mjera (najveći zajednički djelitelj) prirodnih brojeva a, b, ... je najveći broj koji dijeli sve te brojeve. Oznaka je M(a, b, ...).
Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b,\ q \text{ je količnik},\ r \text{ je ostatak}.$$

▶

Pri dijeljenju brojeva 535 i 223 s nekim prirodnim brojem dobivamo ostatak 7. To znači da su brojevi 535 – 7 = 528 i 223 – 7 = 216 djeljivi istim brojem. Taj broj je njihova najveća zajednička mjera. Dobije se kao umnožak svih zajedničkih prostih faktora zadanih brojeva.
Odredimo najveću zajedničku mjeru brojeva 528 i 216.
Da bismo našli njihovu najveću zajedničku mjeru moramo ih rastaviti na proste faktore (dijelimo ih sa zajedničkim prostim brojevima)

$$\begin{array}{cc|c} 528 & 216 & 2 \\ 264 & 108 & 2 \\ 132 & 54 & 2 \\ 66 & 27 & 3 \\ 22 & 9 & \end{array}$$

Traženi broj je

$$M(528,\ 216) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \ \Rightarrow \ M(528,\ 216) = 24.$$

Vrijedi:

$$535 = 22 \cdot 24 + 7 \quad , \quad 223 = 9 \cdot 24 + 7.$$

Vježba 469

Odredi najveći prirodni broj s kojim treba podijeliti brojeve 285 i 237 tako da ostatak u oba dijeljenja bude 9.

Rezultat: $285 = 23 \cdot 12 + 9 \ , \ 237 = 19 \cdot 12 + 9.$

5.

Zadatak 795 (TNT, gimnazija)

Izvedi operacije: $\left[\frac{(a+b)^3}{3\cdot a\cdot b}-a-b\right]^n : \left[\frac{(a-b)^2}{a\cdot b}+1\right]^n$.

Rješenje 795

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a^n:b^n=(a:b)^n\quad,\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right).$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

▶

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3\cdot a\cdot b}-a-b\right]^n : \left[\frac{(a-b)^2}{a\cdot b}+1\right]^n=\left[\frac{(a+b)^3}{3\cdot a\cdot b}-\frac{a}{1}-\frac{b}{1}\right]^n : \left[\frac{(a-b)^2}{a\cdot b}+\frac{1}{1}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{(a+b)^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2}{3\cdot a\cdot b}\right]^n : \left[\frac{(a-b)^2+a\cdot b}{a\cdot b}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2}{3\cdot a\cdot b}\right]^n : \left[\frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2+a\cdot b}{a\cdot b}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2}{3\cdot a\cdot b}\right]^n : \left[\frac{a^2-a\cdot b+b^2}{a\cdot b}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{a^3+b^3}{3\cdot a\cdot b}\right]^n : \left[\frac{a^2-a\cdot b+b^2}{a\cdot b}\right]^n=\left[\frac{a^3+b^3}{3\cdot a\cdot b}:\frac{a^2-a\cdot b+b^2}{a\cdot b}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{a^3+b^3}{3\cdot a\cdot b}\cdot\frac{a\cdot b}{a^2-a\cdot b+b^2}\right]^n=\left[\frac{(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)}{3\cdot a\cdot b}\cdot\frac{a\cdot b}{a^2-a\cdot b+b^2}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)}{3\cdot a\cdot b}\cdot\frac{a\cdot b}{a^2-a\cdot b+b^2}\right]^n=\left[\frac{a+b}{3}\cdot\frac{1}{1}\right]^n=\left[\frac{a+b}{3}\right]^n.$$

Vježba 795

Izvedi operacije: $\left[\frac{(a+b)^3}{3\cdot a\cdot b}-a-b\right]^n:\left[1+\frac{(a-b)^2}{a\cdot b}\right]^n.$

Rezultat: $\left[\frac{a+b}{3}\right]^n.$

6.

Zadatak 380 (Nick, gimnazija)

Duljina stranice trokuta iznosi c = 17 cm, a razlika duljina drugih dviju stranica je b – a = 2 cm. Nađi duljine a, b, c stranica trokuta ako se one izražavaju prirodnim brojevima, a opseg trokuta je manji od 40 cm.

Rješenje 380

Ponovimo!

$$a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, onda je formula za opseg

$$O = a + b + c.$$

Nejednakost trokuta:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

Duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica.

▶

Opseg trokuta manji je od 40 cm pa vrijedi nejednadžba:

$$a + b + c < 40 \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{c} \text{uvjeti} \\ c = 17 \\ b - a = 2 \ \Rightarrow \ b = 2 + a \end{array}\right] \Rightarrow \ a + 2 + a + 17 < 40 \ \Rightarrow \ a + a < 40 - 2 - 17 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot a < 21 \ \Rightarrow \ 2 \cdot a < 21 \ /:2 \ \Rightarrow \ a = 10.5 \ cm.$$

Uz pretpostavke da su duljine stranica prirodni brojevi i da je **duljina svake stranice trokuta manja od zbroja duljina njegovih ostalih stranica**, postoje tri rješenja.

Prvo rješenje	c = 17 cm a = 10 cm b = 2 + a = 2 + 10 = 12 cm
Drugo rješenje	c = 17 cm a = 9 cm b = 2 + a = 2 + 9 = 11 cm
Treće rješenje	c = 17 cm a = 8 cm b = 2 + a = 2 + 8 = 10 cm

Vježba 380

Odmor!

Rezultat: …

7.

Zadatak 466 (Manuela, strukovna škola)

Otac je rekao: "Imam troje djece. Sin mi je u osnovnoj, a kćerke u srednjoj školi. Broj godina sina je višekratnik broja 5, broj godina jedne kćerke djeljiv je sa 8, a druge sa 9." Koliko godina imaju njegova djeca?

Rješenje 466

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \dots$

▶

Pretpostavimo da nitko nije ponavljao razred.
Broj godina sina, u osnovnoj školi, je višekratnik broja 5. Sin ima 10 godina.

$$10 = 5 \cdot 2.$$

Broj godina prve kćerke, u srednjoj školi, je višekratnik broja 8. Ona ima 16 godina.

$$16 = 8 \cdot 2.$$

Broj godina druge kćerke, u srednjoj školi, je višekratnik broja 9. Ona ima 18 godina.

$$18 = 9 \cdot 2.$$

Vježba 466

Otac je rekao: "Imam troje djece. Sin mi je u osnovnoj, a kćerke u srednjoj školi. Broj godina sina je višekratnik broja 6, broj godina jedne kćerke djeljiv je sa 8, a druge sa 9." Koliko godina imaju njegova djeca

Rezultat: 12, 16, 18.

8.

Zadatak 467 (Manuela, strukovna škola)

Podijelimo li neki broj redom s brojevima 15, 18 i 20 svaki se put dobije ostatak 3. Odredite najmanji broj s tim svojstvom.

Rješenje 467

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.** Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.
Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika. Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$
Zajednički višekratnici dvaju ili više brojeva su brojevi koji su djeljivi sa svim zadanim brojevima.
Najmanji zajednički višekratnik dvaju ili više brojeva je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svim zadanim brojevima.
Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b,\ q \text{ je količnik},\ r \text{ je ostatak}.$$

▶

Odredimo najmanji zajednički višekratnik brojeva 15, 18 i 20.
Da bismo našli njihov najmanji zajednički višekratnik moramo ih rastaviti na proste faktore.

$$\begin{array}{ccc|c} 15 & 18 & 20 & 2 \\ 15 & 9 & 10 & 2 \\ 15 & 9 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$v(15,\ 18,\ 20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \ \Rightarrow\ v(15,\ 18,\ 20) = 180.$$

Traženi broj je:

$$v(15,\ 18,\ 20) + 3 = 180 + 3 = 183.$$

Vježba 467

Podijelimo li neki broj redom s brojevima 15, 18 i 20 svaki se put dobije ostatak 1. Odredite najmanji broj s tim svojstvom.

Rezultat: 181.

9.

Zadatak 468 (Manuela, strukovna škola)

U jednoj su kutiji bijele i crne kuglice. Njihov ukupan broj je između 150 i 200. Ako bismo kuglice brojili po 8 ili po 14, u kutiji ne bi ostala niti jedna kuglica. Koliko je u kutiji bijelih, a koliko crnih kuglica, ako znamo da je crnih kuglica dva puta više nego bijelih?

Rješenje 468

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.** Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.
Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika. Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \dots$
Zajednički višekratnici dvaju ili više brojeva su brojevi koji su djeljivi sa svim zadanim brojevima. Najmanji zajednički višekratnik dvaju ili više brojeva je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svim zadanim brojevima.
Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

▶

Ako bismo kuglice brojili po 8 ili po 14, u kutiji ne bi ostala niti jedna kuglica. Zato je ukupan broj kuglica u kutiji jednak zajedničkom višekratniku broja 8 i 14 koji je veći od 150, a manji od 200.
Odredimo najmanji zajednički višekratnik brojeva 8 i 14.
Da bismo našli njihov najmanji zajednički višekratnik moramo ih rastaviti na proste faktore.

$$\begin{array}{cc|c} 8 & 14 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$v(8,\ 14) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \ \Rightarrow\ v(8,\ 14) = 56.$$

Uvjet zadovoljava broj

$$56 \cdot 3 = 168$$

jer je

$$150 < 168 < 200.$$

Neka je x broj bijelih kuglica. Crnih kuglica je dva puta više po iznosu, 2 · x. Napišemo jednadžbu:

$$x + 2 \cdot x = 168 \ \Rightarrow\ 3 \cdot x = 168 \ \Rightarrow\ 3 \cdot x = 168 \ /:3 \ \Rightarrow\ x = 56.$$

Bijelih kuglica je 56.
Crnih kuglica je 2 · 56 = 112.

Vježba 468

U jednoj su kutiji bijele i crne kuglice. Njihov ukupan broj je između 150 i 200. Ako bismo kuglice brojili po 8 ili po 14, u kutiji ne bi ostala niti jedna kuglica. Koliko je u kutiji bijelih, a koliko crnih kuglica, ako znamo da je crnih kuglica tri puta više nego bijelih?

Rezultat: 42, 126.

10.

Zadatak 204 (Silvica, gimnazija)

Ivan ima 90 kuna manje nego Tomislav. Ako bi svaki od njih dvojice potrošio 20 kuna, onda bi Ivan imao 4 puta manje kuna nego Tomislav. Koliko kuna ima Ivan, a koliko Tomislav?

Rješenje 204

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj b za n manji od broja a?

$$b+n=a \quad , \quad b=a-n \quad , \quad a-b=n.$$

Kako zapisati da je broj b n puta manji od broja a?

$$n\cdot b=a \quad , \quad \frac{a}{n}=b \quad , \quad \frac{a}{b}=n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Označimo slovom x iznos kuna koje ima Tomislav. Ivan ima 90 kuna manje od njega pa to zapisujemo

$$x-90.$$

Ako svaki od njih potroši 20 kuna:

- Tomislav će imati x – 20 kuna
- Ivan će imati x – 90 – 20 = x – 110 kuna.

Sada Ivan ima 4 puta manje kuna od Tomislava pa možemo zapisati u obliku jednadžbe:

$$x-110=\frac{1}{4}\cdot(x-20) \Rightarrow x-110=\frac{1}{4}\cdot(x-20) \; /\cdot 4 \Rightarrow 4\cdot(x-110)=x-20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x-440=x-20 \Rightarrow 4\cdot x-x=-20+440 \Rightarrow 3\cdot x=420 \Rightarrow 3\cdot x=420 \; /:3 \Rightarrow x=140.$$

Tomislav ima 140 kuna.
Ivan ima 140 – 90 = 50 kuna.

Vježba 204

Tomislav ima 90 kuna više nego Ivan. Ako bi svaki od njih dvojice potrošio 20 kuna, onda bi Tomislav imao 4 puta više kuna nego Ivan. Koliko kuna ima Ivan, a koliko Tomislav?

Rezultat: Ivan ima 50 kn, Tomislav ima 140 kn.