I.

Zadatak 225 (Nikša, gimnazija)

Na koliko se načina 20 različitih kuglica može podijeliti na tri skupine od po 5, 7 i 8 kuglica?

Rješenje 225

Ponovimo!

$$\binom{n}{n}=1.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja:
Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza s_1, s_2, s_3, …, s_k jednak

$$N=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ ...\ \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ ...\ \cdot n_k$$

načina.

Kombinacije bez ponavljanja
Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r \le n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ ...\ \cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot r}.$$

Permutacije sa ponavljanjem
Ako je zadano n elemenata, jedan element se ponavlja r puta ($r < n$), a drugi element se ponavlja s puta ($s < n$) tada se permutacije sa ponavljanjem računaju po formuli:

$$P_n^{r,\,s}=\frac{n!}{r!\cdot s!}.$$

Broj načina na koji se može n različitih predmeta podijeliti na k osoba (skupina), ali tako da prva dobije n_1 predmeta, druga n_2 predmeta, … , posljednja n_k predmeta, $n = n_1 + n_2 + … + n_k$, računa se po formuli:

$$N=\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\ ...\ \cdot\binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}}\cdot\binom{n_k}{n_k}$$

ili

$$N=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ ...\ \cdot n_k!}.$$

1.inačica

Dvadeset kuglica je zadano. Pet kuglica koje će pripasti prvoj skupini biramo na $\binom{20}{5}$ načina. Nakon toga ostalo je 15 kuglica, (20 – 5). Sedam kuglica koje će pripasti drugoj skupini biramo na $\binom{15}{7}$ načina. Nakon toga ostalo je 8 kuglica, (15 – 7). Osam kuglica koje će pripasti trećoj skupini biramo na $\binom{8}{8}$ načina. Ukupan broj različitih podjela je

$$N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{8} \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot 1 \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \Rightarrow N = 99\,768\,240.$$

2.inačica

$$\left. \begin{array}{l} n = 20 \\ n_1 = 5 \\ n_2 = 7 \\ n_3 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[N = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \right] \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{20-5}{7} \cdot \binom{20-5-7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{8} \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot 1 \Rightarrow N = \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{7} \Rightarrow N = 99\,768\,240.$$

3.inačica

$$\left. \begin{array}{l} n = 20 \\ n_1 = 5 \\ n_2 = 7 \\ n_3 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \right] \Rightarrow N = \frac{20!}{5! \cdot 7! \cdot 8!} \Rightarrow N = 99\,768\,240.$$

Vježba 225

Na koliko se načina 20 različitih kuglica može podijeliti na tri skupine od po 8, 7 i 5 kuglica?

Rezultat: 99768240.

II.

Zadatak 414 (Ema, gimnazija)

Dokazati da broj $n^2+8\cdot n+15$ nije djeljiv brojem n + 4, gdje je n prirodan broj.

Rješenje 414

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo trinom.

$$n^2+8\cdot n+15=n^2+3\cdot n+5\cdot n+15=\left(n^2+3\cdot n\right)+(5\cdot n+15)=$$

$$=n\cdot(n+3)+5\cdot(n+3)=(n+3)\cdot(n+5).$$

Trinom smo rastavili na dva faktora, ali ni jedan nije n + 4.

2.inačica

Preoblikujemo trinom.

$$n^2+8\cdot n+15=n^2+8\cdot n+16-1=\left(n^2+8\cdot n+16\right)-1=(n+4)^2-1.$$

Trinom se ne može podijeliti brojem n + 4 jer postoji ostatak.

Vježba 414

Dokazati da broj $n^2+8\cdot n+15$ nije djeljiv brojem n + 2, gdje je n prirodan broj.

Rezultat: Dokaz analogan.

III.

Zadatak 415 (Tom, gimnazija)

Dokazati da je $n! = \frac{(2 \cdot n)!!}{2^n}.$

Rješenje 415

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ \dots \ \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1! = 1,
2! = 1 · 2,
3! = 1 · 2 · 3,
4! = 1 · 2 · 3 · 4,
5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Umnožak parnih brojeva zapisujemo ovako:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ \dots \ \cdot (2 \cdot n) = (2 \cdot n)!!.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$n! = \frac{n!}{1} = \left[\begin{array}{l}\text{proširimo} \\ \text{brojem } 2^n\end{array}\right] = \frac{n! \cdot 2^n}{2^n} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ \dots \ \cdot n) \cdot 2^n}{2^n} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot \ \dots \ \cdot (2 \cdot n)}{2^n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ \dots \ \cdot (2 \cdot n)}{2^n} = \frac{(2 \cdot n)!!}{2^n}.$$

Vježba 415

Dokazati da je $2^n \cdot n! = (2 \cdot n)!!.$

Rezultat: Dokaz analogan.

IV.

Zadatak 228 (Asterix, gimnazija)

Odredite $x \in \langle 0, \pi \rangle$ za koji su $\frac{1}{tg\,x}, \frac{1}{\sin x}, tg\,x$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rješenje 228

Ponovimo!

$$ctg\,x = \frac{1}{tg\,x} \quad , \quad ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\cos^2 x + sin^2 x = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Trigonometrijska jednadžba cos x = a

Jednadžba ima rješenje ako i samo ako je

$$-1 \le a \le 1.$$

Tada postoji jedinstven kut α u intervalu

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

čiji je kosinus jednak a pa postoji jednadžba

$$\cos x = \cos \alpha$$

koja ima dva skupa rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z \\ x_2 = -\alpha + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z \end{array}\right\} \text{ ili } x_{1,2} = \pm \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z.$$

Razlomci $\frac{1}{tg\,x}, \frac{1}{\sin x}, tg\,x$ definirani su za svaki $x \in \langle 0, \pi \rangle$, osim za $\frac{\pi}{2}$ jer $tg \frac{\pi}{2}$ nije definiran.

Budući da zadani izrazi tvore tri uzastopna člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$\frac{2}{\sin x}=\frac{1}{tg\,x}+tg\,x \;\Rightarrow\; \frac{2}{\sin x}=ctg\,x+tg\,x \;\Rightarrow\; \frac{2}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{2}{\sin x}=\frac{\cos^2 x+sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x} \;\Rightarrow\; \frac{2}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x} \;\Rightarrow\; 2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot\sin x\cdot\cos x-\sin x=0 \;\Rightarrow\; \sin x\cdot(2\cdot\cos x-1)=0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\cdot\cos x-1=0\end{array}\right\}.$$

Vidi se da ne može biti sin x = 0 jer tada $\frac{1}{\sin x}$ nije definirano. Zato je:

$$2\cdot\cos x-1=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot\cos x=1 \;\Rightarrow\; 2\cdot\cos x=1\;/:2 \;\Rightarrow\; \cos x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{3}.$$

Dakle, na skupu $\left\langle 0,\,\pi\right\rangle \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ je $x=\frac{\pi}{3}$ jedinstveno rješenje.

Vježba 228

Odredite $x\in\left\langle 0,\,\pi\right\rangle$ za koji su $tg\,x,\;\frac{1}{\sin x},\;\frac{1}{tg\,x}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rezultat: $\frac{\pi}{3}.$

V.

Zadatak 041 (1C, 1D, 1E, 1F, TUPŠ)

Koliko kave možemo poslužiti ako na raspolaganju imamo 10.55 kg kave, a za jednu kavu potrebno je 5 grama?

Rješenje 041

Ponovimo!

$$1\ kg = 1000\ g.$$

Rezolvirati znači jedinice – veličine višega reda pretvoriti u jedinice – veličine nižega reda. Tu množimo s pretvornicima.

Na primjer,

$$4\ h\ 15\ \min\ 20\ s = 4 \cdot 3600\ s + 15 \cdot 60\ s + 20\ s = 15320\ s.$$

Dekadske jedinice su brojevi koji se dobiju množenjem broja 10 samim sobom. Dekadske jedinice su brojevi: 10, 100, 1000, 10000, 100000 itd. Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom tako da decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadski broj ima nula.

Najprije 10.55 kilograma pretvorimo u grame tako da pomnožimo brojem 1000 (decimalnu točku pomaknemo za tri mjesta udesno).

$$10.55 \cdot 1000 = 10550.$$

Sada 10550 podijelimo brojem 5.

$$10550 : 5 = 2110.$$

Možemo poslužiti 2110 kava.

Vježba 041

Koliko kave možemo poslužiti ako na raspolaganju imamo 21.55 kg kave, a za jednu kavu potrebno je 5 grama?

Rezultat: 4310.

VI.

Zadatak 219 (Tomislav, gimnazija)

Umnožak udaljenosti žarišta hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ do bilo koje njezine tangente je stalan i jednak b^2.

Rješenje 219

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^b.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Linearni ekscentricitet hiperbole:

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Žarišta hiperbole imaju koordinate:

$$F_1(-e, 0) \quad , \quad F_2(e, 0).$$

Pravac $y = k \cdot x + l$ dira hiperbolu $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ onda i samo onda kad vrijedi:

$$a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{\left| A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|a|\cdot|b| = |a\cdot b|.$$

Pretpostavimo da je pravac

$$y = k\cdot x + l$$

tangenta hiperbole

$$b^2\cdot x^2 - a^2\cdot y^2 = a^2\cdot b^2.$$

Njegovu jednadžbu preoblikujemo u implicitni oblik.

$$y = k\cdot x + l \Rightarrow k\cdot x + l = y \Rightarrow k\cdot x - y + l = 0.$$

Udaljenosti žarišta F_1 i F_2 od pravca (tangente) glase:

- $$\left.\begin{array}{l} F_1(x_\circ, y_\circ) = F_1(-e, 0) \\ k\cdot x - y + l = 0 \\ A = k \ , \ B = -1 \ , \ C = l \end{array}\right\} \Rightarrow \left[d_1 = \frac{|A\cdot x_\circ + B\cdot y_\circ + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right] \Rightarrow d_1 = \frac{|k\cdot(-e) - 1\cdot 0 + l|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{|-k\cdot e + l|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

- $$\left.\begin{array}{l} F_2(x_\circ, y_\circ) = F_2(e, 0) \\ k\cdot x - y + l = 0 \\ A = k \ , \ B = -1 \ , \ C = l \end{array}\right\} \Rightarrow \left[d_2 = \frac{|A\cdot x_\circ + B\cdot y_\circ + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right] \Rightarrow d_2 = \frac{|k\cdot e - 1\cdot 0 + l|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{|k\cdot e + l|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Umnožak udaljenosti d_1 i d_2 iznosi:

$$d_1\cdot d_2 = \frac{|-k\cdot e + l|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{|k\cdot e + l|}{\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{|-k\cdot e + l|\cdot|k\cdot e + l|}{\left(\sqrt{k^2+1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{|(-k\cdot e + l)\cdot(k\cdot e + l)|}{k^2+1} \Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{|(l - k\cdot e)\cdot(l + k\cdot e)|}{k^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{\left|l^2 - (k\cdot e)^2\right|}{k^2+1} \Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{\left|l^2 - k^2\cdot e^2\right|}{k^2+1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2\cdot k^2 - b^2 = l^2 \\ e^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{\left|a^2\cdot k^2 - b^2 - k^2\cdot\left(a^2 + b^2\right)\right|}{k^2+1} \Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{\left|a^2\cdot k^2 - b^2 - k^2\cdot a^2 - k^2\cdot b^2\right|}{k^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{\left|a^2\cdot k^2 - b^2 - k^2\cdot a^2 - k^2\cdot b^2\right|}{k^2+1} \Rightarrow d_1\cdot d_2 = \frac{\left|-b^2 - k^2\cdot b^2\right|}{k^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot d_2 = \frac{\left|-b^2 \cdot \left(1+k^2\right)\right|}{k^2+1} \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = \frac{\left|-b^2\right| \cdot \left|1+k^2\right|}{k^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot d_2 = \frac{b^2 \cdot \left(k^2+1\right)}{k^2+1} \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = \frac{b^2 \cdot \left(k^2+1\right)}{k^2+1} \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = b^2.$$

Vježba 219

Umnožak udaljenosti žarišta hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ do bilo koje njezine tangente je stalan i jednak b^2.

Rezultat: Dokaz analogan.

VII.

Zadatak 431 (Max, gimnazija)

Pokaži da se kao rezultat eliminacije x i y iz jednadžbi sin x + sin y = 2 · a, cos x + cos y = 2 · b, cos (x – y) = – 4 · a · b dobije $(a+b)^2=\frac{1}{2}$.

Rješenje 431

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c=b+d.$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad , \quad \cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x+\sin y=2\cdot a \\ \cos x+\cos y=2\cdot b \\ \cos(x-y)=-4\cdot a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x+\sin y=2\cdot a \ /^2 \\ \cos x+\cos y=2\cdot b \ /^2 \\ \cos(x-y)=-4\cdot a\cdot b \ /\cdot(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\sin x+\sin y)^2=(2\cdot a)^2 \\ (\cos x+\cos y)^2=(2\cdot b)^2 \\ -2\cdot\cos(x-y)=8\cdot a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\sin y+\sin^2 y=4\cdot a^2 \\ \cos^2 x+2\cdot\cos x\cdot\cos y+\cos^2 y=4\cdot b^2 \\ -2\cdot\cos(x-y)=8\cdot a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\sin y+\sin^2 y+\cos^2 x+2\cdot\cos x\cdot\cos y+\cos^2 y-2\cdot\cos(x-y)=$$

$$=4\cdot a^2+4\cdot b^2+8\cdot a\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 y+\cos^2 y+2\cdot\cos x\cdot\cos y+2\cdot\sin x\cdot\sin y-2\cdot\cos(x-y)=$$

$$=4\cdot\left(a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\left(\sin^2 y+\cos^2 y\right)+2\cdot(\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y)-2\cdot\cos(x-y)=$$

$$=4\cdot\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+1+2\cdot\cos(x-y)-2\cdot\cos(x-y)=4\cdot(a+b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2\cdot\cos(x-y)-2\cdot\cos(x-y)=4\cdot(a+b)^2 \Rightarrow 2=4\cdot(a+b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot(a+b)^2=2\ \Rightarrow\ 4\cdot(a+b)^2=2\ /\cdot\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ (a+b)^2=\frac{2}{4}\ \Rightarrow\ (a+b)^2=\frac{2}{4}\ \Rightarrow\ (a+b)^2=\frac{1}{2}.$$

Vježba 431

Pokaži da se kao rezultat eliminacije x i y iz jednadžbi sin x + sin y – 2 · a = 0, cos x + cos y – 2 · b = 0, cos (x – y) + 4 · a · b = 0 dobije $(a+b)^2=\frac{1}{2}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

VIII.

Zadatak 432 (Max, gimnazija)

Ako je $ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta + ctg\,\alpha \cdot ctg\,\gamma + ctg\,\beta \cdot ctg\,\gamma = 1$ (α, β, γ šiljasti kutovi), pokazati da je $\alpha + \beta + \gamma = \pi.$

Rješenje 432

Ponovimo!

$$ctg\,(x+y) = \frac{ctg\,x \cdot ctg\,y - 1}{ctg\,x + ctg\,y} \quad , \quad ctg\,(\pi - x) = -ctg\,x.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Postupno preoblikujemo zadanu jednakost.

$$ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta + ctg\,\alpha \cdot ctg\,\gamma + ctg\,\beta \cdot ctg\,\gamma = 1 \Rightarrow ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta + ctg\,\alpha \cdot ctg\,\gamma = 1 - ctg\,\beta \cdot ctg\,\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\,\alpha \cdot (ctg\,\beta + ctg\,\gamma) = -(ctg\,\beta \cdot ctg\,\gamma - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\,\alpha \cdot (ctg\,\beta + ctg\,\gamma) = -(ctg\,\beta \cdot ctg\,\gamma - 1) \,/\cdot \frac{1}{ctg\,\beta + ctg\,\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\,\alpha = -\frac{ctg\,\beta \cdot ctg\,\gamma - 1}{ctg\,\beta + ctg\,\gamma} \Rightarrow \left[ctg\,(x-y) = \frac{ctg\,x \cdot ctg\,y - 1}{ctg\,x + ctg\,y} \right] \Rightarrow ctg\,\alpha = -ctg\,(\beta + \gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ctg\,(\pi - x) = -ctg\,x \right] \Rightarrow ctg\,\alpha = ctg\,(\pi - (\beta + \gamma)) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha,\ \beta,\ \gamma \\ \text{šiljasti kutovi} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \pi - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Vježba 432

Ako je $ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta + ctg\,\alpha \cdot ctg\,\gamma + ctg\,\beta \cdot ctg\,\gamma - 1 = 0$ (α, β, γ šiljasti kutovi), pokazati da je $\alpha + \beta + \gamma = \pi.$

Rezultat: Dokaz analogan.

IX.

Zadatak 206 (Lucija, gimnazija)

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1=\frac{1}{3+\sqrt{5}}$, $x_2=\frac{1}{3-\sqrt{5}}$.

Rješenje 206

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

($a\neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=0,$$

gdje je $a\neq 0$ po volji određen broj.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Ako vrijedi

$$x_1+x_2=b \quad , \quad x_1\cdot x_2=c,$$

onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-b\cdot x+c=0.$$

Preoblikujemo rješenja x_1 i x_2 tako da racionaliziramo nazivnike.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1}{3+\sqrt{5}} \\ x_2=\dfrac{1}{3-\sqrt{5}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\ x_2=\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)} \\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{9-5} \\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{9-5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right\}.$$

1.inačica

Znajući rješenja, znamo i faktorizaciju kvadratnog trinoma:

$$a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right]=a\cdot\left(x-\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\right)\cdot\left(x-\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\right)=$$

$$=a\cdot\left(x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=a\cdot\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\cdot\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=$$

$$=a\cdot\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2\right)=a\cdot\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{4^2}\right)=$$

$$=a\cdot\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{5}{16}\right)=a\cdot\left(x^2-x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9-5}{16}\right)=a\cdot\left(x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{4}{16}\right)=$$

$$=a\cdot\left(x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{4}{16}\right)=a\cdot\left(x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right).$$

Ovdje koeficijent a može biti bilo kakav (osim nule). Uzmimo da je a = 4. Tražena kvadratna jednadžba glasi:

$$4\cdot\left(x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right)=0 \;\Rightarrow\; 4\cdot x^2-4\cdot\frac{3}{2}\cdot x+4\cdot\frac{1}{4}=0 \;\Rightarrow\; 4\cdot x^2-4\cdot\frac{3}{2}\cdot x+4\cdot\frac{1}{4}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4\cdot x^2-6\cdot x+1=0.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} = b \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} = b \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = b \\ \frac{9}{16} - \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{4^2} = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{6}{4} = b \\ \frac{9}{16} - \frac{5}{16} = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{6}{4} = b \\ \frac{9-5}{16} = c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2} = b \\ \frac{4}{16} = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2} = b \\ \frac{4}{16} = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2} = b \\ \frac{1}{4} = c \end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4} = 0 \ / \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$$

Vježba 206

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1 = \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$.

Rezultat: $4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$

X.

Zadatak 205 (Jozo, srednja škola)

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1 = m + \sqrt{n},\ x_2 = m - \sqrt{n},\ n > 0.$

Rješenje 205

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a\cdot\left(x - x_1\right)\cdot\left(x - x_2\right) = 0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji određen broj.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ako vrijedi

$$x_1 + x_2 = b \quad , \quad x_1\cdot x_2 = c,$$

onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - b\cdot x + c = 0.$$

1.inačica

Znajući rješenja, znamo i faktorizaciju kvadratnog trinoma:

$$a\cdot\left(x - x_1\right)\cdot\left(x - x_2\right) = \begin{bmatrix} x_1 = m + \sqrt{n} \\ x_2 = m - \sqrt{n} \end{bmatrix} = a\cdot\left(x - \left(m + \sqrt{n}\right)\right)\cdot\left(x - \left(m - \sqrt{n}\right)\right) =$$

$$= a\cdot\left(x - m - \sqrt{n}\right)\cdot\left(x - m + \sqrt{n}\right) = a\cdot\left((x-m) - \sqrt{n}\right)\cdot\left((x-m) + \sqrt{n}\right) =$$

$$= a\cdot\left((x-m)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2\right) = a\cdot\left(x^2 - 2\cdot m\cdot x + m^2 - n\right).$$

Ovdje koeficijent a može biti bilo kakav (osim nule). Uzmimo da je a = 1. Tražena kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 - 2\cdot m\cdot x + m^2 - n = 0.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = m + \sqrt{n} \\ x_2 = m - \sqrt{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} = b \\ \left(m + \sqrt{n}\right) \cdot \left(m - \sqrt{n}\right) = c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} = b \\ m^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2 = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m + m = b \\ m^2 - n = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot m = b \\ m^2 - n = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 2 \cdot m \\ c = m^2 - n \end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 - b \cdot x + c = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - n = 0.$$

Vježba 205

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Rezultat: $x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0.$