I.

Zadatak 193 (4B, TUPŠ)

Ako se vrijednost brojnika nekog razlomka uveća za vrijednost njegova nazivnika, a vrijednost nazivnika umanji za vrijednost brojnika, vrijednost tog razlomka je 2. Ako se brojniku pribroji 8, a nazivnik ostane nepromijenjen, vrijednost razlomka je 3. Koji je to razlomak?

Rješenje 193

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kako zapisati da je broj a uvećan za broj b?

$$a+b.$$

Kako zapisati da je broj a umanjen za broj b?

$$a-b.$$

▶

Neka je x brojnik, a y nazivnik nepoznatog razlomka $\frac{x}{y}$.

Rečenicu "Ako se vrijednost brojnika nekog razlomka uveća za vrijednost njegova nazivnika, a vrijednost nazivnika umanji za vrijednost brojnika, vrijednost tog razlomka je 2." možemo zapisati u obliku jednadžbe na sljedeći način:

$$\frac{x+y}{y-x}=2 \Rightarrow \frac{x+y}{y-x}=2 \ /\cdot(y-x) \Rightarrow x+y=2\cdot y-2\cdot x \Rightarrow x+y-2\cdot y+2\cdot x=0 \Rightarrow 3\cdot x-y=0.$$

Rečenicu "Ako se brojniku pribroji 8, a nazivnik ostane nepromijenjen, vrijednost razlomka je 3." možemo zapisati u obliku jednadžbe na ovaj način:

$$\frac{x+8}{y}=3 \Rightarrow \frac{x+8}{y}=3 \ /\cdot y \Rightarrow x+8=3\cdot y \Rightarrow x-3\cdot y=-8.$$

Zadatak se svodi na rješavanje sustava jednadžbi. Idemoooo!

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x-y=0 \\ x-3\cdot y=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x-y=0 \\ x-3\cdot y=-8 \ /\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x-y=0 \\ -3\cdot x+9\cdot y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow 8\cdot y=24 \Rightarrow 8\cdot y=24 \ /:8 \Rightarrow y=3.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} y=3 \\ 3\cdot x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot x-3=0 \Rightarrow 3\cdot x=3 \Rightarrow 3\cdot x=3 \ /:3 \Rightarrow x=1.$$

To je razlomak

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}.$$

Vježba 193

Ako se vrijednost brojnika nekog razlomka uveća za vrijednost njegova nazivnika, a vrijednost nazivnika umanji za vrijednost brojnika, vrijednost tog razlomka je 3. Ako se brojniku pribroji 3, a nazivnik ostane nepromijenjen, vrijednost razlomka je 2. Koji je to razlomak?

Rezultat: $\frac{1}{2}.$

II.

Zadatak 194 (4B, TUPŠ)

Dvije cijevi pune bazen. Ako se otvore obje cijevi, bazen se napuni za 12 sati. Otvori li se najprije prva cijev 9 sati, a zatim druga 6 sati, napunit će se $\frac{2}{3}$ bazena. Za koje bi vrijeme prva cijev, a za koje druga cijev napunila bazen?

Rješenje 194

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{n}{a}=\frac{n}{b} \Rightarrow a=b.$$

$$a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

Neka je:

- x broj sati za koje bazen napuni prva cijev
- y broj sati za koje bazen napuni druga cijev.

Prva cijev napuni bazen za x sati pa će za 1 sat napuniti $\frac{1}{x}-$ ti dio bazena.

Druga cijev napuni bazena za y sati pa će za 1 sat napuniti $\frac{1}{y}-$ ti dio bazena.

Ako obje cijevi bazen napune za 12 sati, za 1 sat napunit će $\frac{1}{12}$ bazena. Zato vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}.$$

Ako najprije prva cijev puni bazen 9 sati, a zatim druga 6 sati, napunit će se $\frac{2}{3}$ bazena. Zaključujemo da vrijedi jednadžba:

$$\frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{3}.$$

Postavimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ u=\frac{1}{x} \ , \ v=\frac{1}{y}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}u+v=\frac{1}{12}\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}u+v=\frac{1}{12} \ /\cdot(-6)\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6\cdot u-6\cdot v=-\frac{6}{12}\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6\cdot u-6\cdot v=-\frac{6}{12}\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6\cdot u-6\cdot v=-\dfrac{1}{2} \\ 9\cdot u+6\cdot v=\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot u=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3} \Rightarrow 3\cdot u=\frac{-3+4}{6} \Rightarrow 3\cdot u=\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot u=\frac{1}{6} \;/\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow u=\frac{1}{18}.$$

Računamo v.

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{18} \\ u+v=\dfrac{1}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{18}+v=\frac{1}{12} \Rightarrow v=\frac{1}{12}-\frac{1}{18} \Rightarrow v=\frac{3-2}{36} \Rightarrow v=\frac{1}{36}.$$

Vraćamo se na zamjene!

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{18} \\ v=\dfrac{1}{36} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ u=\dfrac{1}{x} \\ v=\dfrac{1}{y} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{18} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{36} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=18\ h \\ y=36\ h \end{array}\right\}.$$

Vježba 194

Dvije cijevi pune bazen. Ako se otvore obje cijevi, bazen se napuni za pola dana. Otvori li se najprije prva cijev 9 sati, a zatim druga 6 sati, napunit će se $\frac{2}{3}$ bazena. Za koje bi vrijeme prva cijev, a za koje druga cijev napunila bazen?

Rezultat: 18 h, 36 h.

III.

Zadatak 195 (4B, TUPŠ)

Put između gradova A i B prelazi preko planine. Na uzbrdici brzina automobila doseže 20 km / h, a na nizbrdici 40 km / h. Iz grada A u grad B automobil stigne za 8 sati, a u povratku putuje 7 sati. Koliko je dug put? (Napomena: Kod jednolikog pravocrtnog gibanja vrijeme se računa po formuli $t=\frac{s}{v}$, gdje je t vrijeme, s put, v brzina.)

Rješenje 195

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

▶

Označimo slovom V najvišu točku puta između gradova A i B. Neka je:

- x udaljenost od grada A do vrha V planine
- y udaljenost od grada B do vrha V planine.

Iz grada A u grad B automobil stigne za 8 sati. Put od grada A do vrha V planine prešao je za vrijeme $\frac{x}{20}$, a put od vrha V planine do grada B prešao je za vrijeme $\frac{y}{40}$. Zato vrijedi jednadžba:

$$\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8.$$

Iz grada B u grad A (na povratku) automobil stigne za 7 sati. Put od grada B do vrha V planine prešao je za vrijeme $\frac{y}{20}$, a put od vrha V planine do grada A prešao je za vrijeme $\frac{x}{40}$. Sada možemo napisati jednadžbu:

$$\frac{y}{20}+\frac{x}{40}=7.$$

Postavimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8\\ \frac{y}{20}+\frac{x}{40}=7\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8\\ \frac{x}{40}+\frac{y}{20}=7\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8\ /\cdot(-80)\\ \frac{x}{40}+\frac{y}{20}=7\ /\cdot 40\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-4\cdot x-2\cdot y=-640\\ x+2\cdot y=280\end{array}\right\}\Rightarrow -3\cdot x=-360\Rightarrow -3\cdot x=-360\ /:(-3)\Rightarrow x=120.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=120 \\ x+2\cdot y=280 \end{array}\right\} \Rightarrow 120+2\cdot y=280 \Rightarrow 2\cdot y=280-120 \Rightarrow 2\cdot y=160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot y=160 \ /:2 \Rightarrow y=80.$$

Cijeli put od grada A do grada B dug je

$$x+y=120\ km+80\ km=200\ km.$$

Vježba 195

Put između gradova A i B prelazi preko planine. Na uzbrdici brzina automobila dosiže 10 km / h, a na nizbrdici 20 km / h. Iz grada A u grad B automobil stigne za 14 sati, a u povratku putuje 13 sati. Koliko je dug put? (Napomena: Kod jednolikog pravocrtnog gibanja vrijeme se računa po formuli $t=\frac{s}{v}$, gdje je t vrijeme, s put, v brzina.)

Rezultat: 180 km.

IV.

Zadatak 778 (4B, TUPŠ + Tonka ☺. gimnazija)

Skrati razlomak: $\frac{x^2-6\cdot x+9}{5\cdot x-15}$.

$A.\ \frac{x+3}{5}$ $\quad B.\ \frac{x-2}{3}$ $\quad C.\ \frac{x-3}{5}$ $\quad D.\ \frac{x+6}{5}$

Rješenje 778

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

$$\frac{x^2-6\cdot x+9}{5\cdot x-15}=\frac{(x-3)^2}{5\cdot(x-3)}=\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{5\cdot\cancel{(x-3)}}=\frac{x-3}{5}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 778

Skrati razlomak: $\frac{x^2+6\cdot x+9}{5\cdot x+15}$.

$A.\ \frac{x+3}{5}$ $\quad B.\ \frac{x-2}{3}$ $\quad C.\ \frac{x-3}{5}$ $\quad D.\ \frac{x+6}{5}$

Rezultat: A.

V.

Zadatak 779 (4B, TUPŠ + Tonka ☺. gimnazija)

Skrati razlomak: $\frac{a^2+4\cdot a+4}{a^2+3\cdot a+2}$.

$A.\ \frac{a+1}{a+2}$ $\quad B.\ \frac{a+2}{a+1}$ $\quad C.\ \frac{2\cdot a+1}{a+1}$ $\quad D.\ \frac{a+2}{2\cdot a+1}$

Rješenje 779

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

$$\frac{a^2+4\cdot a+4}{a^2+3\cdot a+2}=\left[\begin{array}{l}\text{u nazivniku}\\ \text{matoda grupiranja}\end{array}\right]=\frac{(a+2)^2}{a^2+a+2\cdot a+2}=\frac{(a+2)^2}{\left(a^2+a\right)+(2\cdot a+2)}=$$

$$=\frac{(a+2)^2}{a\cdot(a+1)+2\cdot(a+1)}=\frac{(a+2)^2}{(a+1)\cdot(a+2)}=\frac{(a+2)^2}{(a+1)\cdot(a+2)}=\frac{a+2}{a+1}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 779

Skrati razlomak: $\frac{a^2+3\cdot a+2}{a^2+4\cdot a+4}$.

$A.\ \frac{a+1}{a+2}$ $\quad B.\ \frac{a+2}{a+1}$ $\quad C.\ \frac{2\cdot a+1}{a+1}$ $\quad D.\ \frac{a+2}{2\cdot a+1}$

Rezultat: A.

VI.

Zadatak 780 (4B, TUPŠ + Tonka ☺. gimnazija)

Skrati razlomak: $\frac{3 \cdot x^{3} \cdot y + 24 \cdot y}{x^{2} - 4}$.

Rješenje 780

Ponovimo!

$$a^{3} + b^{3} = (a + b) \cdot \left(a^{2} - a \cdot b + b^{2}\right) \quad , \quad a^{2} - b^{2} = (a - b) \cdot (a + b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

▶

$$\frac{3 \cdot x^{3} \cdot y + 24 \cdot y}{x^{2} - 4} = \frac{3 \cdot y \cdot \left(x^{3} + 8\right)}{x^{2} - 2^{2}} = \frac{3 \cdot y \cdot \left(x^{3} + 2^{3}\right)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \frac{3 \cdot y \cdot (x + 2) \cdot \left(x^{2} - 2 \cdot x + 2^{2}\right)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} =$$

$$= \frac{3 \cdot y \cdot (x + 2) \cdot \left(x^{2} - 2 \cdot x + 4\right)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \frac{3 \cdot y \cdot (x + 2) \cdot \left(x^{2} - 2 \cdot x + 4\right)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \frac{3 \cdot y \cdot \left(x^{2} - 2 \cdot x + 4\right)}{x - 2}.$$

Vježba 780

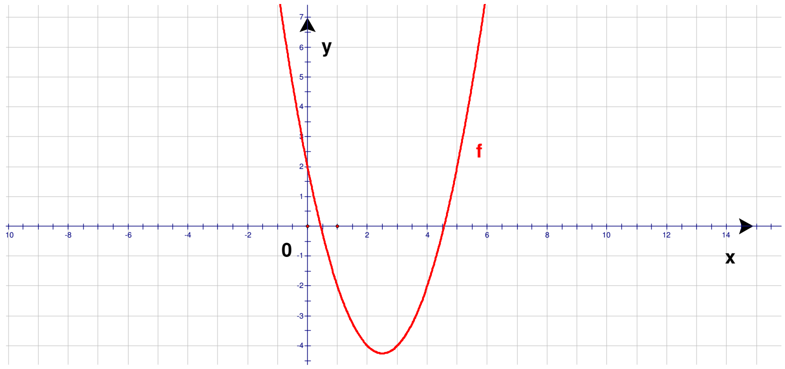
Skrati razlomak: $\frac{x^{2} - 4}{3 \cdot x^{3} \cdot y + 24 \cdot y}$.

Rezultat: $\frac{x - 2}{3 \cdot y \cdot \left(x^{2} - 2 \cdot x + 4\right)}$.

VII.

Zadatak 102 (4B, TUPŠ)

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



$A.\ a<0,\ D=0$ $B.\ a>0,\ D>0$ $C.\ a<0,\ D<0$ $D.\ a<0,\ D>0$

Rješenje 102

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja.
Za a > 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema gore.
Za a < 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema dolje.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

Diskriminanta	Jednadžba	Parabola
D > 0	Jednadžba ima dva različita realna rješenja.	Parabola siječe os apscisa (os x).
D = 0	Jednadžba ima dvostruko realno rješenje.	Parabola dira os apscisa (os x).
D < 0	Jednadžba nema realnih rješenja, rješenja su konjugirano kompleksni brojevi.	Parabola ne siječe, niti dira os apscisa (os x).

▶

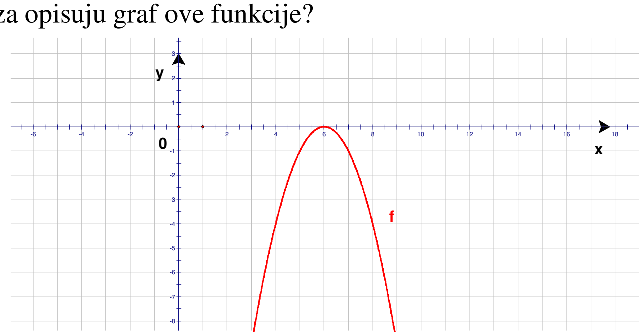
Sa slike vidi se:

- parabola je otvorom okrenuta prema gore pa je a > 0
- parabola siječe os apscisa pa je D > 0.

Odgovor je pod B.

Vježba 102

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



$A.\ a>0,\ D=0$ $B.\ a>0,\ D>0$ $C.\ a<0,\ D<0$ $D.\ a<0,\ D=0$

Rezultat: D.

VIII.

Zadatak 090 (Asterix, gimnazija)

U kojoj točki krivulje $y = x^2 - 4$ treba položiti tangentu tako da bude usporedna s pravcem $y = 6 \cdot x$?

Rješenje 090

Ponovimo!

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f – g derivabilna pa slijedi:

$$\left(f(x) - g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Kada je pravac tangenta na graf funkcije f, onda je njegov koeficijent smjera jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = f'(x_\circ).$$

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.
Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_\circ = f'(x_\circ) \cdot (x - x_\circ).$$

▶

Iz zadanog pravca odredimo koeficijent smjera.

$$y = 6 \cdot x \Rightarrow k_1 = 6.$$

Tangenta je usporedna s tim pravcem pa njezin koeficijent smjera iznosi:

$$k_2 = k_1 \Rightarrow k_2 = 6.$$

Odredimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^2 - 4.$$

$$f'(x) = \left(x^2 - 4\right)' \Rightarrow f'(x) = \left(x^2\right)' - 4' \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x.$$

Zato je

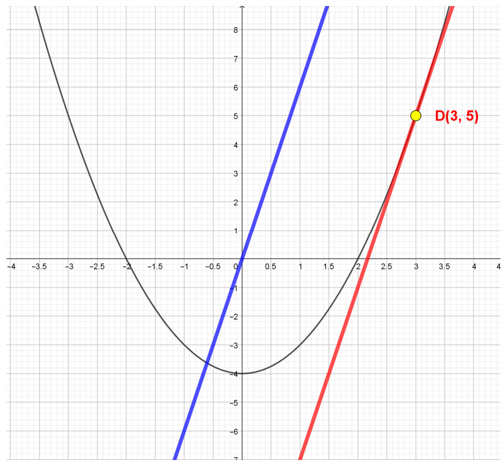
$$f'(x) = k_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} f'(x) = 2 \cdot x \\ k_2 = 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot x = 6 \Rightarrow 2 \cdot x = 6 \;/:2 \Rightarrow x = 3.$$

Izračunali smo apscisu x točke D u kojoj tangenta dira graf funkcije f. Računamo ordinatu y.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4 \\ x = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) = 3^2 - 4 \Rightarrow f(3) = 9 - 4 \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow y = 5.$$

Tangentu treba položiti u točki D:

$$D(x,\ y) = D(3,\ 5).$$



Vježba 090

U kojoj točki krivulje y = x^2 – 4 treba položiti tangentu tako da bude usporedna s pravcem 6 · x – y = 0?

Rezultat: D(3, 5).

IX.

Zadatak 089 (Asterix, gimnazija)

U kojoj točki krivulje $y = x^3 + 2 \cdot x - 1$ treba položiti tangentu tako da bude okomita na pravac $x + y = 0$?

Rješenje 089

Ponovimo!

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
x	1
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da su funkcije f + g i f – g derivabilne pa slijedi:

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot \left(f(x)\right)' \text{ , } c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x) + g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)'.$$

$$\left(f(x) - g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Kada je pravac tangenta na graf funkcije f, onda je njegov koeficijent smjera jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = f'(x_0).$$

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.

Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Imaginarni brojevi imaju oblik

$$b \cdot i,$$

gdje je *b* realni broj koji nije jednak nuli, a *i* je imaginarna jedinica za koju vrijedi:

$$i = \sqrt{-1}.$$

▶

Jednadžbu zadanog pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera.

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow k_1 = -1.$$

Tangenta je okomita na taj pravac pa njezin koeficijent smjera iznosi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{-1} \Rightarrow k_2 = 1.$$

Odredimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^3 + 2 \cdot x - 1.$$

$$f'(x) = \left(x^3 + 2 \cdot x - 1\right)' \Rightarrow f'(x) = \left(x^3\right)' + (2 \cdot x)' - 1' \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2.$$

Zato je

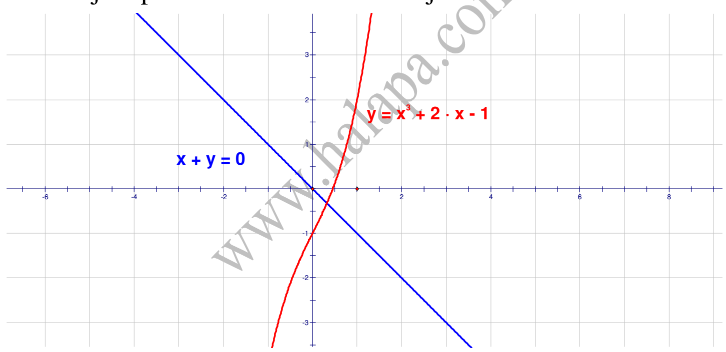
$$f'(x) = k_2 \Rightarrow \left[\begin{matrix} f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \\ k_2 = 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow 3 \cdot x^2 + 2 = 1 \Rightarrow 3 \cdot x^2 = 1 - 2 \Rightarrow 3 \cdot x^2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x^2 = -1 \;/ : 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \;/ \sqrt{\;} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\, i \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{matrix}\right] \Rightarrow x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rješenja su imaginarni brojevi pa takvih točaka na krivulji nema.



Vježba 089

U kojoj točki krivulje y = x^3 + 2 · x – 3 treba položiti tangentu tako da bude okomita na pravac x + y = 0 ?

Rezultat: Nema ih!

X.

Zadatak 192 (2A, TUPŠ)

Spremnik se kroz prvu cijev može napuniti za 3 sata, a kroz drugu isprazniti za 5 sati. Za koje će se vrijeme napuniti spremnik ako se istodobno otvore obje cijevi?

Rješenje 192

Ponovimo!

$$1\ h = 60\ \min \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Kako se računa n – ti dio od x?

$$\frac{1}{n} \cdot x.$$

▶

1.inačica

Prva cijev napuni spremnik za 3 sata pa će za 1 sat napuniti $\frac{1}{3}$ spremnika.

Druga cijev isprazni puni spremnik za 5 sati pa će za 1 sat isprazniti $\frac{1}{5}$ spremnika.

Ako bi obje cijevi zajedno napunile spremnik za x sati, onda one za 1 sat napune $\frac{1}{x}$ – ti dio spremnika. Stoga mora biti

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{5-3}{15} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{15}{2} \Rightarrow x = 7.5\ h \Rightarrow x = 7\ h\ 30\ \min.$$

2.inačica

(Originalno rješenje ponudio je Mateo Feltrin 2A, TUPŠ. Uz njegovo dopuštenje objavljujemo ga.)
U zadatku bitan je omjer dotoka vode što iznosi 3 sata i odvoda vode koji iznosi 5 sati. Pretpostavimo li, na primjer, da voda utječe brzinom 10 L / h, pomoću te brzine lako izračunamo obujam spremnika. On iznosi 30 litara.

$$3\ h \cdot 10\ \frac{L}{h} = 30\ L.$$

Sada možemo naći brzinu otjecanja vode.

$$\frac{30\ L}{5\ h} = 6\ \frac{L}{h}.$$

Budući da znamo brzine i obujam, elegantno odredimo vrijeme t za koje se spremnik napuni ako su istodobno otvorene obje cijevi.

$$(10-6) \cdot t = 30 \Rightarrow 4 \cdot t = 30 \Rightarrow 4 \cdot t = 30\ /:4 \Rightarrow t = 7.5\ h \Rightarrow t = 7\ h\ 30\ \min.$$

Vježba 192

Spremnik se kroz prvu cijev može napuniti za 3 sata, a kroz drugu isprazniti za 4 sata. Za koje će se vrijeme napuniti spremnik ako se istodobno otvore obje cijevi?

Rezultat: 12 h.

XI.

Zadatak 185 (4B, TUPŠ, Tonka ☺, gimnazija)

Rješenje nejednadžbe $11-\left[\,2\cdot y-(4-3\cdot y)\cdot(4+3\cdot y)\,\right]<6\cdot y-(3\cdot y-1)^2$ jest:

$A.\ y\in\left\langle -\infty,\,-2\right\rangle$ $\quad B.\ y\in\left\langle 2,\,+\infty\right\rangle$ $\quad C.\ y\in\left\langle -\infty,\,2\right\rangle$ $\quad D.\ y\in\left\langle -2,\,+\infty\right\rangle$

Rješenje 185

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\quad,\quad(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a<b\ ,\ c<0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\quad,\quad x>a\ \Rightarrow\ x\in\left\langle a,\,+\infty\right\rangle\quad,\quad x<a\ \Rightarrow\ x\in\left\langle -\infty,\,a\right\rangle.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

$$11-\left[\,2\cdot y-(4-3\cdot y)\cdot(4+3\cdot y)\,\right]<6\cdot y-(3\cdot y-1)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 11-\left[\,2\cdot y-\left(4^2-(3\cdot y)^2\right)\right]<6\cdot y-\left((3\cdot y)^2-2\cdot 3\cdot y\cdot 1+1^2\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 11-\left[\,2\cdot y-\left(16-9\cdot x^2\right)\right]<6\cdot y-\left(9\cdot x^2-6\cdot y+1\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 11-\left[\,2\cdot y-16+9\cdot y^2\,\right]<6\cdot y-9\cdot y^2+6\cdot y-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 11-2\cdot y+16-9\cdot y^2<6\cdot y-9\cdot y^2+6\cdot y-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 11-2\cdot y+16-9\cdot y^2<6\cdot y-9\cdot y^2+6\cdot y-1\ \Rightarrow\ 11-2\cdot y+16<6\cdot y+6\cdot y-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\cdot y-6\cdot y-6\cdot y<-1-11-16\ \Rightarrow\ -14\cdot y<-28\ \Rightarrow\ -14\cdot y<-28\ /:(-14)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y>2\ \Rightarrow\ y\in\left\langle 2,\,+\infty\right\rangle.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 185

Rješenje nejednadžbe $11-\left[\,2\cdot y-(4-3\cdot y)\cdot(4+3\cdot y)\,\right]>6\cdot y-(3\cdot y-1)^2$ jest:

$A.\ y\in\left\langle -\infty,\,-2\right\rangle$ $\quad B.\ y\in\left\langle 2,\,+\infty\right\rangle$ $\quad C.\ y\in\left\langle -\infty,\,2\right\rangle$ $\quad D.\ y\in\left\langle -2,\,+\infty\right\rangle$

Rezultat: C.

XII.

Zadatak 498 (4B, TUPŠ, Tonka ☺, gimnazija)

Rješenje jednadžbe $\frac{10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01}{10^{3\cdot x}}=1$ jest:

$A.\ -2 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ -3$

Rješenje 498

Ponovimo!

$$0.01=10^{-2} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad , \quad a^\circ=1.$$

$$100=10^2 \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, …) tako da mu decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.

▶

1.inačica

$$\frac{10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01}{10^{3\cdot x}}=1 \Rightarrow \frac{10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01}{10^{3\cdot x}}=1\ /\cdot 10^{3\cdot x} \Rightarrow 10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01=10^{3\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{2\cdot x-1}\cdot 10^{-2}=10^{3\cdot x} \Rightarrow 10^{2\cdot x-1-2}=10^{3\cdot x} \Rightarrow 10^{2\cdot x-3}=10^{3\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x-3=3\cdot x \Rightarrow 2\cdot x-3\cdot x=3 \Rightarrow -x=3 \Rightarrow -x=3\ /\cdot(-1) \Rightarrow x=-3.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\frac{10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01}{10^{3\cdot x}}=1 \Rightarrow \frac{10^{2\cdot x-1}\cdot 10^{-2}}{10^{3\cdot x}}=1 \Rightarrow \frac{10^{2\cdot x-1-2}}{10^{3\cdot x}}=1 \Rightarrow \frac{10^{2\cdot x-3}}{10^{3\cdot x}}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{2\cdot x-3-3\cdot x}=1 \Rightarrow 10^{-x-3}=1 \Rightarrow 10^{-x-3}=10^\circ \Rightarrow -x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=3 \Rightarrow -x=3\ /\cdot(-1) \Rightarrow x=-3.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

$$\frac{10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01}{10^{3\cdot x}}=1 \Rightarrow \frac{10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01}{10^{3\cdot x}}=1\ /\cdot 10^{3\cdot x} \Rightarrow 10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01=10^{3\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01=10^{3\cdot x}\ /\cdot 100 \Rightarrow 10^{2\cdot x-1}\cdot 0.01\cdot 100=10^{3\cdot x}\cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{2\cdot x-1}=10^{3\cdot x}\cdot 10^2 \Rightarrow 10^{2\cdot x-1}=10^{3\cdot x+2} \Rightarrow 2\cdot x-1=3\cdot x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x-3\cdot x=2+1 \Rightarrow -x=3 \Rightarrow -x=3\ /\cdot(-1) \Rightarrow x=-3.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 498

Rješenje jednadžbe $\frac{10^{2\cdot x-1}}{100\cdot 10^{3\cdot x}}=1$ jest:

$A.\ -2 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ -3$

Rezultat: D.

XIII.

Zadatak 776 (4B, TUPŠ + Tonka ☺. gimnazija)

Reducirani oblik izraza $\frac{x^2-1}{x^2-y^2}:\frac{x-1}{x-y}$ glasi:

$A.\ 1 \qquad B.\ \frac{x-1}{x-y} \qquad C.\ \frac{x-y}{x-1} \qquad D.\ \frac{x+1}{x+y}$

Rješenje 776

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

$$\frac{x^2-1}{x^2-y^2}:\frac{x-1}{x-y}=\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\cdot\frac{x-y}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-y)\cdot(x+y)}\cdot\frac{x-y}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-y)\cdot(x+y)}\cdot\frac{x-y}{x-1}=$$

$$=\frac{x+1}{x+y}\cdot\frac{1}{1}=\frac{x+1}{x+y}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 776

Reducirani oblik izraza $\frac{x-1}{x-y}:\frac{x^2-1}{x^2-y^2}$ glasi:

$A.\ \frac{x-y}{x-1} \qquad B.\ \frac{x+y}{x+1} \qquad C.\ \frac{x}{x-1} \qquad D.\ \frac{y+1}{x+y}$

Rezultat: B.

XIV.

Zadatak 777 (4B, TUPŠ + Tonka ☺. gimnazija)

$$\text{Za } a \neq -\frac{1}{2} \text{ izraz } \frac{1-\frac{1}{1+2\cdot a}+2\cdot a}{1+\frac{1}{1+2\cdot a}} \text{ jednak je:}$$

$$A.\ 2\cdot a+1 \qquad B.\ 2\cdot a+2 \qquad C.\ 2\cdot a \qquad D.\ a$$

Rješenje 777

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1=a.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}=\frac{a}{b} \quad , \quad a\cdot\frac{1}{a}=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

1.inačica

$$\frac{1-\frac{1}{1+2\cdot a}+2\cdot a}{1+\frac{1}{1+2\cdot a}}=\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2\cdot a}+\frac{2\cdot a}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2\cdot a}}=\frac{\frac{1+2\cdot a-1+2\cdot a\cdot(1+2\cdot a)}{1+2\cdot a}}{\frac{1+2\cdot a+1}{1+2\cdot a}}=$$

$$=\frac{\frac{1+2\cdot a-1+2\cdot a+4\cdot a^2}{1+2\cdot a}}{\frac{2+2\cdot a}{1+2\cdot a}}=\frac{\frac{1+2\cdot a-1+2\cdot a+4\cdot a^2}{1+2\cdot a}}{\frac{2+2\cdot a}{1+2\cdot a}}=\frac{\frac{2\cdot a+2\cdot a+4\cdot a^2}{1+2\cdot a}}{\frac{2+2\cdot a}{1+2\cdot a}}=$$

$$=\frac{\frac{4\cdot a+4\cdot a^2}{1+2\cdot a}}{\frac{2+2\cdot a}{1+2\cdot a}}=\frac{\frac{4\cdot a+4\cdot a^2}{1+2\cdot a}}{\frac{2+2\cdot a}{1+2\cdot a}}=\frac{4\cdot a+4\cdot a^2}{2+2\cdot a}=\frac{4\cdot a\cdot(1+a)}{2\cdot(1+a)}=\frac{4\cdot a\cdot(1+a)}{2\cdot(1+a)}=\frac{2\cdot a}{1}=2\cdot a.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\frac{1-\frac{1}{1+2\cdot a}+2\cdot a}{1+\frac{1}{1+2\cdot a}}=\left[\begin{array}{l}\text{razlomak proširimo}\\ \text{izrazom } 1+2\cdot a\end{array}\right]=\frac{\left(1-\frac{1}{1+2\cdot a}+2\cdot a\right)\cdot(1+2\cdot a)}{\left(1+\frac{1}{1+2\cdot a}\right)\cdot(1+2\cdot a)}=$$

$$=\frac{1+2\cdot a-1+2\cdot a\cdot(1+2\cdot a)}{1+2\cdot a+1}=\frac{1+2\cdot a-1+2\cdot a+4\cdot a^2}{1+2\cdot a+1}=\frac{1+2\cdot a-1+2\cdot a+4\cdot a^2}{1+2\cdot a+1}=$$

$$=\frac{2\cdot a+2\cdot a+4\cdot a^2}{2+2\cdot a}=\frac{4\cdot a+4\cdot a^2}{2+2\cdot a}=\frac{4\cdot a\cdot(1+a)}{2\cdot(1+a)}=\frac{4\cdot a\cdot(1+a)}{2\cdot(1+a)}=\frac{2\cdot a}{1}=2\cdot a.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 777

Za $a\neq-\frac{1}{2}$ izraz $\dfrac{1+2\cdot a-\frac{1}{1+2\cdot a}}{1+\frac{1}{1+2\cdot a}}$ jednak je :

$A.\ 2\cdot a+1 \qquad B.\ 2\cdot a+2 \qquad C.\ 2\cdot a \qquad D.\ a$

Rezultat: C.

XV.

Zadatak 156 (4B, TUPŠ, Tonka ☺ gimnazija)

Pravac p zadan je jednadžbom $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$. Koji od ponuđenih pravaca siječe pravac p u točki T(4, y)?

$A.\ -3 \cdot x + 7 \cdot y = -5$ $B.\ 3 \cdot x - 8 \cdot y = -4$ $C.\ 3 \cdot x - 2 \cdot y = 2$ $D.\ x - 3 \cdot y = -4$

Rješenje 156

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

Pravci se sijeku pa točka T pripada i jednom i drugom pravcu. Budući da točka T pripada pravcu $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca i tako izračunati ordinatu y.

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(4, y) \\ y = \frac{1}{2} \cdot x + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 \Rightarrow y = 2 + 3 \Rightarrow y = 5.$$

Koordinate točke T glase:

$$T(x, y) = T(4, 5).$$

1.inačica

Točka T mora pripadati traženom pravcu koji siječe pravac p. Ispitajmo redom!

- $\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(4, 5) \\ -3 \cdot x + 7 \cdot y = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow -3 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = -5 \Rightarrow -12 + 35 = -5 \Rightarrow 23 \neq -5$ nije rješenje
- $\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(4, 5) \\ 3 \cdot x - 8 \cdot y = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 4 - 8 \cdot 5 = -4 \Rightarrow 12 - 40 = -4 \Rightarrow -28 \neq -4$ nije rješenje
- $\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(4, 5) \\ 3 \cdot x - 2 \cdot y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2 \Rightarrow 12 - 10 = 2 \Rightarrow 2 = 2$ je rješenje
- $\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(4, 5) \\ x - 3 \cdot y = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - 3 \cdot 5 = -4 \Rightarrow 4 - 15 = -4 \Rightarrow -11 \neq -4$ nije rješenje.

Odgovor je pod C.

2.inačica

Točka T sjecište je pravca p i jednog od ponuđenih pravaca. Njezine koordinate bit će rješenja sustava jednadžba.

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ -3\cdot x+7\cdot y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow -3\cdot x+7\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=-5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3\cdot x+\frac{7}{2}\cdot x+21=-5 \Rightarrow -3\cdot x+\frac{7}{2}\cdot x+21=-5 \;/\cdot 2 \Rightarrow -6\cdot x+7\cdot x+42=-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\cdot x+7\cdot x=-10-42 \Rightarrow x=-52.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=-52 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-52)+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-52)+3 \Rightarrow y=-26+3 \Rightarrow y=-23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,\ y)=T(-52,\ -23)\ \text{nije rješenje}$$

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ 3\cdot x-8\cdot y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot x-8\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=-4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\cdot x-4\cdot x-24=-4 \Rightarrow 3\cdot x-4\cdot x=-4+24 \Rightarrow -x=20 \Rightarrow -x=20 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x=-20.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=-20 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-20)+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-20)+3 \Rightarrow y=-10+3 \Rightarrow y=-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,\ y)=T(-20,\ -7)\ \text{nije rješenje}$$

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ 3\cdot x-2\cdot y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot x-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\cdot x-x-6=2 \Rightarrow 3\cdot x-x=2+6 \Rightarrow 2\cdot x=8 \Rightarrow 2\cdot x=8 \;/:2 \Rightarrow x=4.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 4+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 4+3 \Rightarrow y=2+3 \Rightarrow y=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,\ y)=T(4,\ 5)\ \text{je rješenje}$$

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ x-3\cdot y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow x-3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=-4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x-\frac{3}{2}\cdot x-9=-4 \Rightarrow x-\frac{3}{2}\cdot x-9=-4 \;/\cdot 2 \Rightarrow 2\cdot x-3\cdot x-18=-8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x-3\cdot x=-8+18 \Rightarrow -x=10 \Rightarrow -x=10 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x=-10.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=-10 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-10)+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-10)+3 \Rightarrow y=-5+3 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ T(x,\ y) = T(-10,\ -2) \text{ nije rješenje.}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 156

Pravac p zadan je jednadžbom $y = \frac{3}{2} \cdot x - 1$. Koji od ponuđenih pravaca siječe pravac p u točki T(4, y)?

$A.\ -3 \cdot x + 7 \cdot y = -5$ $B.\ 3 \cdot x - 8 \cdot y = -4$ $C.\ -x + 2 \cdot y = 6$ $D.\ x - 3 \cdot y = -4$

Rezultat: C.

XVI.

Zadatak 210 (4B, TUPŠ, Tonka ☺, gimnazija)

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $4 \cdot x^2 + 36 = 0$ jest:

A. 0 *B.* 6 *C.* −6 *D.* −3

Rješenje 210

Ponovimo!

Imaginarna jedinica i je broj čiji je kvadrat jednak – 1,

$$i^2 = -1.$$

Umnožak realnog broja b i imaginarne jedinice i zove se imaginaran broj

$$b \cdot i.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

▶

1.inačica

Riješimo jednadžbu!

$$4 \cdot x^2 + 36 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 = -36 \Rightarrow 4 \cdot x^2 = -36 \ /:4 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = -9 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3 \cdot i \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 3 \cdot i \\ x_2 = -3 \cdot i \end{matrix}\right\}.$$

Tada je:

$$x_1 + x_2 = 3 \cdot i + (-3 \cdot i) = 3 \cdot i - 3 \cdot i = 3 \cdot i - 3 \cdot i = 0.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Uporabom Vièteove formule dobije se:

$$4 \cdot x^2 + 36 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 36 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 36 = 0 \\ a = 4 \ , \ b = 0 \ , \ c = 36 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{0}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0.$$

Odgovor je pod A.

Napomena: Zbroj rješenja svake nepotpune kvadratne jednadžbe jednak je 0.

Vježba 210

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $2 \cdot x^2 + 50 = 0$ jest:

A. 0 *B.* 6 *C.* −6 *D.* −3

Rezultat: A.

XVII.

Zadatak 775 (4B, TUPŠ + Tonka ☺. gimnazija)

Za $x \neq -1$ izraz $\dfrac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}$ jednak je:

$$A.\ -x \qquad B.\ \frac{1}{x+1} \qquad C.\ x+1 \qquad D.\ 1$$

Rješenje 775

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}=\frac{a}{b}.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \frac{1}{a}\cdot a=1 \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

1.inačica

$$\frac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=\frac{\frac{x+2}{1}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{1}}=\frac{\frac{x\cdot(x+2)+1}{x}}{\frac{1+x}{x}}=\frac{\frac{x^2+2\cdot x+1}{x}}{\frac{1+x}{x}}=\frac{\frac{x^2+2\cdot x+1}{x}}{\frac{1+x}{x}}=\frac{x^2+2\cdot x+1}{1+x}=$$

$$=\frac{(x+1)^2}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{x+1}=\frac{x+1}{1}=x+1.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\frac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=\left[\begin{array}{l}\text{proširimo}\\ \text{razlomak sa } x\end{array}\right]=\frac{\left(x+2+\frac{1}{x}\right)\cdot x}{\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot x}=\frac{x^2+2\cdot x+1}{1+x}=\frac{(x+1)^2}{x+1}=$$

$$=\frac{(x+1)^2}{x+1}=\frac{x+1}{1}=x+1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 775

Za x ≠ – 1 izraz $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}+2}{1+\dfrac{1}{x}}$ jednak je:

$A.\ -x \qquad B.\ \dfrac{1}{x+1} \qquad C.\ x+1 \qquad D.\ 1$

Rezultat: C.

XVIII.

Zadatak 042 (4B, TUPŠ, Tonka ☺, gimnazija)

Izrazite ploštinu od $\frac{1}{5}$ km^2 u hektarima. (Napomena: 1 ha = 10000 m^2)

Rješenje 042

Ponovimo!

$$1\ km^2 = 10^6\ m^2 \quad , \quad 1\ ha = 10^4\ m^2.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Kako ispitati koliko je puta broj b veći od broja a?

$$\frac{b}{a} = ...$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

1.inačica

$$\frac{1}{5}\ km^2 = \frac{1}{5} \cdot 10^6\ m^2 = \frac{1}{5} \cdot 10^2 \cdot 10^4\ m^2 = \frac{1}{5} \cdot 10^2 \cdot \left(10^4\ m^2\right) = \left[\ 1\ ha = 10^4\ m^2\ \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 10^2\ ha = \frac{1}{5} \cdot 100\ ha = \frac{1}{5} \cdot 100\ ha = 20\ ha.$$

2.inačica

$$\frac{\frac{1}{5}\ km^2}{1\ ha} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 10^6\ m^2}{10^4\ m^2} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 10^6\ m^2}{10^4\ m^2} = \frac{1}{5} \cdot 10^2 = \frac{1}{5} \cdot 100 = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20 \Rightarrow \frac{1}{5}\ km^2 = 20\ ha.$$

Vježba 042

Izrazite ploštinu od $\frac{2}{5}$ km^2 u hektarima. (Napomena: 1 ha = 10000 m^2)

Rezultat: 40 ha.

XIX.

Zadatak 774 (4B, TUPŠ + Tonka ☺. gimnazija)

Pojednostavnite izraz: $\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{(a+b)^2}$.

Rješenje 774

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot a^m \quad , \quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

$$\frac{n}{1}=n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

▶

1.inačica

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{(a+b)^2}=\frac{\left((a-b)\cdot(a+b)\right)^2}{(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2\cdot(a+b)^2}{(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2\cdot(a+b)^2}{(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2}{1}=(a-b)^2.$$

2.inačica

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^2=\left(\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{a+b}\right)^2=\left(\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{a+b}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a-b}{1}\right)^2=(a-b)^2.$$

Vježba 774

Pojednostavnite izraz: $\frac{(a+b)^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}$.

Rezultat: $\frac{1}{(a-b)^2}$.

XX.

Zadatak 367 (4B, TUPŠ)

Odredimo polumjer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice a = 11 cm i b = 18 cm zatvaraju kut od 68° 30'.

$A.\ 9.31\ cm \qquad B.\ 8.66\ cm \qquad C.\ 10.5\ cm \qquad D.\ 9.9\ cm$

Rješenje 367

Ponovimo!

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R \quad , \quad \frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R \quad , \quad \frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R \quad , \quad \frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

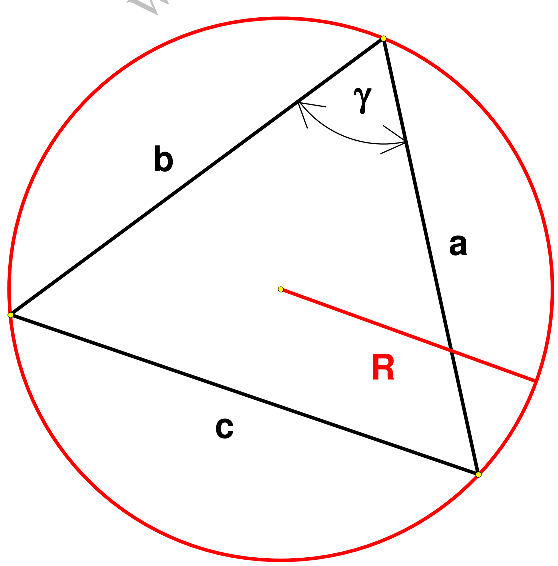
Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha.$$

Ploština trokuta

$$P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R},$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, R polumjer trokutu opisane kružnice.



▶

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \\ \dfrac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\sqrt{\;} \\ 2\cdot R=\dfrac{c}{\sin\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \\ 2\cdot R=\dfrac{c}{\sin\gamma}\;/\cdot\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \\ R=\dfrac{c}{2\cdot\sin\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{2\cdot\sin\gamma} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=11\ cm \\ b=18\ cm \\ \gamma=68^\circ 30' \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{(11\ cm)^2+(18\ cm)^2-2\cdot 11\ cm\cdot 18\ cm\cdot\cos 68^\circ 30'}}{2\cdot\sin 68^\circ 30'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow R=9.31\ cm.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \\ P=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\sqrt{\;} \\ P=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}\;/\cdot\dfrac{R}{P} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \\ R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot P} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{a\cdot b\cdot\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{4\cdot P} \Rightarrow \left[P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{a\cdot b\cdot\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma} \Rightarrow R=\frac{a\cdot b\cdot\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{2\cdot\sin\gamma} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=11\ cm \\ b=18\ cm \\ \gamma=68^\circ 30' \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{(11\ cm)^2+(18\ cm)^2-2\cdot 11\ cm\cdot 18\ cm\cdot\cos 68^\circ 30'}}{2\cdot\sin 68^\circ 30'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow R=9.31\ cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 367

Odredimo polumjer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice a = 11 cm i b = 18 cm zatvaraju kut od 60º.

$A.\ 9.07\ cm \qquad B.\ 9.12\ cm \qquad C.\ 9.5\ cm \qquad D.\ 9.02\ cm$

Rezultat: A.

XXI.

Zadatak 497 (4B, TUPŠ)

Izračunaj x kako bi jednakost $27^7 : 9^x = 3^9$ bila ispravna.

$A.\ 2 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ 0$

Rješenje 497

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

▶

$$27^7 : 9^x = 3^9 \Rightarrow \left(3^3\right)^7 : \left(3^2\right)^x = 3^9 \Rightarrow 3^{21} : 3^{2 \cdot x} = 3^9 \Rightarrow 3^{21 - 2 \cdot x} = 3^9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21 - 2 \cdot x = 9 \Rightarrow -2 \cdot x = 9 - 21 \Rightarrow -2 \cdot x = -12 \Rightarrow -2 \cdot x = -12 \ /: (-2) \Rightarrow x = 6.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 497

Izračunaj x kako bi jednakost $27^7 = 3^9 \cdot 9^x$ bila ispravna.

$A.\ 2 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ 0$

Rezultat: C.

XXII.

Zadatak 430 (4B, TUPŠ)

Nakon djelomičnog korjenovanja i obavljenih računskih operacija izraz

$$\frac{\left(\sqrt{50}+\sqrt{32}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}}$$ daje:

$A.\ 24\cdot\sqrt{2}$ $\quad B.\ 21\cdot\sqrt{2}$ $\quad C.\ 42$ $\quad D.\ 21$

Rješenje 430

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

$$\frac{\left(\sqrt{50}+\sqrt{32}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}}=\left[\begin{array}{c}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}\right)}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(5\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot 3}{1}=\frac{21\cdot\sqrt{2}}{1}=21\cdot\sqrt{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 430

Nakon djelomičnog korjenovanja i obavljenih računskih operacija izraz

$$\frac{\left(\sqrt{50}+\sqrt{32}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}}$$ daje:

$A.\ 24\cdot\sqrt{2}$ $\quad B.\ 21\cdot\sqrt{2}$ $\quad C.\ 42$ $\quad D.\ 21$

Rezultat: B.

XXIII.

Zadatak 431 (4B, TUPŠ)

Kolika je vrijednost izraza $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right)^2$?

$A.\ 3-\sqrt{7}$ $\quad B.\ \sqrt{7}-\sqrt{3}$ $\quad C.\ 1$ $\quad D.\ 2$

Rješenje 431

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}\right)^2-2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+3}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{2}}+\frac{3-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+3}{2}+\frac{3-\sqrt{2}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+3+3-\sqrt{2}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{4}}=\frac{\sqrt{2}+3+3-\sqrt{2}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}}=$$

$$=\frac{6}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{9-2}{4}}=\frac{6}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}=3-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}=3-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=3-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=3-\sqrt{7}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 431

Kolika je vrijednost izraza $\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}\right)^2$?

$A.\ 3-\sqrt{7}$ $\quad B.\ \sqrt{7}-\sqrt{3}$ $\quad C.\ 1$ $\quad D.\ 2$

Rezultat: A.

XXIV.

Zadatak 432 (4B, TUPŠ)

Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ jednak je:

$A.\ 1 \qquad B.\ \sqrt{3}+2 \qquad C.\ \sqrt{3} \qquad D.\ 3\cdot\sqrt{2}$

Rješenje 432

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

$$\frac{n}{1}=n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

▶

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4-3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{1}}{2-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}=\sqrt{3}+2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 432

Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ jednak je:

$A.\ 1 \qquad B.\ \sqrt{3}+2 \qquad C.\ \sqrt{3} \qquad D.\ 3\cdot\sqrt{2}$

Rezultat: B.