I.

Zadatak 484 (Asterix, gimnazija)

Broj stanovnika u nekome gradu svake se godine povećao za isti postotak u odnosu na prethodnu godinu. Za šest se godina broj stanovnika povećao s 1635000 na 2010000 stanovnika. Koliko posto iznosi godišnje povećanje broja stanovnika toga grada?

Rješenje 484

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100}$, $81\ \% = \frac{81}{100}$, $4.5\ \% = \frac{4.5}{100}$, $0.3\ \% = \frac{0.3}{100}$, $p\ \% = \frac{p}{100}$.

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Neka je p postotak za koji se svake godine poveća broj stanovnika u gradu. Na početku broj stanovnika bio je 1635000.

Na kraju **prve** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_1 = 1635000 + \frac{p}{100} \cdot 1635000 \Rightarrow S_1 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Na kraju **druge** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_2 = S_1 + \frac{p}{100} \cdot S_1 \Rightarrow S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_2 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Na kraju **treće** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_3 = S_2 + \frac{p}{100} \cdot S_2 \Rightarrow S_3 = S_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_3 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Na kraju **četvrte** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_4 = S_3 + \frac{p}{100} \cdot S_3 \Rightarrow S_4 = S_3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_4 = 1635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = 1635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 .$$

Vidi se da je na kraju n – te godine broj stanovnika iznosio:

$$S_n = 1635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .$$

Dakle, na kraju **šeste** godine je broj stanovnika bio:

$$S_6 = 1635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 .$$

Prema uvjetu zadatka dobije se eksponencijalna jednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} S_6 = 1635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 \\ S_6 = 2\,010\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow 1635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2\,010\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1635\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2\,010\,000 \ / \cdot \frac{1}{1635\,000} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{2\,010\,000}{1635\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{2\,010\,000}{1635\,000} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109} \ / \sqrt[6]{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} \Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1 \Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1 \ / \cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 100 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Idemoooooooooooooooo,} \\ \text{džepno računalo u ruke!} \end{array}\right] \Rightarrow p = 3.50.$$

Vježba 484

Broj stanovnika u nekome gradu svake se godine povećao za isti postotak u odnosu na prethodnu godinu. Za šest se godina broj stanovnika povećao s 3270000 na 4020000 stanovnika. Koliko posto iznosi godišnje povećanje broja stanovnika toga grada?

Rezultat: 3.50 %.

II.

Zadatak 407 (Marijan, gimnazija)

Dokažite da je $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot n+1}}.$

Rješenje 407

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}+...+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{\left(\sqrt{2\cdot n-1}\right)^2-\left(\sqrt{2\cdot n+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+...+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-(2\cdot n+1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+...+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-2\cdot n-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+...+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-2\cdot n-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+...+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+...+\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+...+\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot n+1}}{1}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot n+1}}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2\cdot n+1}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot n+1-3}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot n-2}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{2\cdot(n-1)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot(n-1)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{n-1}{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}=\frac{n-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot n+1}}.$$

Vježba 407

Dokažite da je $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}$.

Rezultat: Točno je, dokaz analogan.

III.

Zadatak 125 (Karlo, gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} x^2 - y\cdot z = y - x \\ y^2 - x\cdot z = z - y \\ z^2 - x\cdot y = x - z \end{cases}.$

Rješenje 125

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c = b + d \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 - y\cdot z = y - x \\ y^2 - x\cdot z = z - y \\ z^2 - x\cdot y = x - z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - y\cdot z + y^2 - x\cdot z + z^2 - x\cdot y = y - x + z - y + x - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - y\cdot z + y^2 - x\cdot z + z^2 - x\cdot y = y - x + z - y + x - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - y\cdot z + y^2 - x\cdot z + z^2 - x\cdot y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x\cdot y - x\cdot z - y\cdot z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x\cdot y - x\cdot z - y\cdot z = 0 \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot z^2 - 2\cdot x\cdot y - 2\cdot x\cdot z - 2\cdot y\cdot z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot z + z^2 + y^2 - 2\cdot y\cdot z + z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2\right) + \left(x^2 - 2\cdot x\cdot z + z^2\right) + \left(y^2 - 2\cdot y\cdot z + z^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y = z.$$

Rješenje sustava je svaka trojka realnih brojeva oblika:

$$(a,\ a,\ a) \ ,\ a \in R.$$

Vježba 125

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} x^2 + x = y\cdot z + y \\ y^2 + y = x\cdot z + z \\ z^2 + z = x\cdot y + x \end{cases}.$

Rezultat: $(a,\ a,\ a) \ ,\ a \in R.$

IV.

Zadatak 406 (Luka, gimnazija)

Dokažite da za sve prirodne brojeve n ≥ 3 vrijedi $3^n > 2^n + 3 \cdot n$.

Rješenje 406

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 3

$$3^3 > 2^3 + 3 \cdot 3 \Rightarrow 27 > 8 + 9 \Rightarrow 27 > 17.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n veći od 3, tj. da vrijedi

$$3^n > 2^n + 3 \cdot n - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo tvrdnju za sljedbenika n + 1. Pomnožimo prethodnu nejednakost s 3.

$$3^n > 2^n + 3 \cdot n \Rightarrow 3^n > 2^n + 3 \cdot n \; / \cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 2^n + 9 \cdot n \Rightarrow 3^{n+1} > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 6 \cdot n.$$

Važno je uočiti da je

$$3 > 2 \quad , \quad 6 \cdot n > 3,$$

za svaki prirodni broj n.
Sada iz gornje nejednakosti slijedi:

$$3^{n+1} > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 6 \cdot n \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 > 2 \\ 6 \cdot n > 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3^{n+1} > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 6 \cdot n > 2 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} > 2^{n+1} + 3 \cdot (n + 1).$$

Vježba 406

Dokažite da za sve prirodne brojeve n ≥ 5 vrijedi $2^n > n^2$.

Rezultat: Točno je.

V.

Zadatak 755 (Ivan, srednja škola)

Rastavi na faktore: $9 \cdot a^{2} - 12 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^{2} - 25.$

Rješenje 755

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^{n} = a^{n} \cdot b^{n} \quad , \quad (a-b)^{2} = a^{2} - 2 \cdot a \cdot b + b^{2} \quad , \quad a^{2} - b^{2} = (a-b) \cdot (a+b).$$

Najprije združimo prva tri pribrojnika.

$$9 \cdot a^{2} - 12 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^{2} - 25 = \left(9 \cdot a^{2} - 12 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^{2}\right) - 25 =$$

$$= \left((3 \cdot a)^{2} - 2 \cdot 3 \cdot a \cdot 2 \cdot b + (2 \cdot b)^{2}\right) - 25 = (3 \cdot a - 2 \cdot b)^{2} - 5^{2} = (3 \cdot a - 2 \cdot b - 5) \cdot (3 \cdot a - 2 \cdot b + 5).$$

Vježba 755

Rastavi na faktore: $4 \cdot b^{2} - 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot a^{2} - 25.$

Rezultat: $(3 \cdot a - 2 \cdot b - 5) \cdot (3 \cdot a - 2 \cdot b + 5).$

VI.

Zadatak 756 (Ivan, srednja škola)

Rastavi na faktore: $a^2 \cdot b^2 - a^2 - b^2 - 4 \cdot a \cdot b + 1.$

Rješenje 756

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$a^2 \cdot b^2 - a^2 - b^2 - 4 \cdot a \cdot b + 1 = a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot b + 1 - a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{bmatrix} = \left(a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot b + 1\right) + \left(-a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2\right) =$$

$$= \left((a \cdot b)^2 - 2 \cdot a \cdot b + 1\right) - \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\right) = (a \cdot b - 1)^2 - (a+b)^2 =$$

$$= \left((a \cdot b - 1) - (a+b)\right) \cdot \left((a \cdot b - 1) + (a+b)\right) = (a \cdot b - 1 - a - b) \cdot (a \cdot b - 1 + a + b) =$$

$$= (a \cdot b - a - b - 1) \cdot (a \cdot b + a + b - 1).$$

Vježba 756

Rastavi na faktore: $a^2 \cdot b^2 - a^2 - b^2 - 6 \cdot a \cdot b + 4.$

Rezultat: $(a \cdot b - a - b - 2) \cdot (a \cdot b + a + b - 2).$

VII.

Zadatak 757 (Ivan, srednja škola)

Rastavi na faktore: $\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot x^2-4\cdot x+1.$

Rješenje 757

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad (a-b)^4=a^4-4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a\cdot b^3+b^4.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot x^2-4\cdot x+1=\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+1=$$

$$=\left(\left(x^2-2\cdot x\right)+1\right)^2=\left(x^2-2\cdot x+1\right)^2=\left((x-1)^2\right)^2=(x-1)^4.$$

2.inačica

$$\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot x^2-4\cdot x+1=\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 2\cdot x+(2\cdot x)^2+2\cdot x^2-4\cdot x+1=$$

$$=x^4-4\cdot x^3+4\cdot x^2+2\cdot x^2-4\cdot x+1=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1=(x-1)^4.$$

Vježba 757

Rastavi na faktore: $(x-1)^2+4\cdot x.$

Rezultat: $(x+1)^2.$

VIII.

Zadatak 204 (Darko, gimnazija)

Uz koji uvjet kvadratna jednadžba $x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0$ ima dvostruko rješenje?

Rješenje 204

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -2 \cdot a \ , \ c = a^2 - b^2 - c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[D = 0 \Rightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \right] \Rightarrow (-2 \cdot a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(a^2 - b^2 - c^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 = 0 \Rightarrow 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 = 0 \Rightarrow 4 \cdot \left(b^2 + c^2 \right) = 0 \Rightarrow b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow b = c = 0.$$

Vježba 204

Uz koji uvjet kvadratna jednadžba $x^2 - 2 \cdot x + 1 - b^2 - c^2 = 0$ ima dvostruko rješenje?

Rezultat: $b = c = 0.$

IX.

Zadatak 483 (Maja, gimnazija)

Dokažite da za x > 0 vrijedi nejednakost $x^2 + 4^x + 1 - x \cdot 2^{x+1} > 0.$

Rješenje 483

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 .$$

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

$$x^2 + 4^x + 1 - x \cdot 2^{x+1} = x^2 + \left(2^2\right)^x + 1 - x \cdot 2^x \cdot 2^1 = x^2 + \left(2^x\right)^2 + 1 - x \cdot 2^x \cdot 2 =$$

$$= x^2 + \left(2^x\right)^2 + 1 - 2 \cdot x \cdot 2^x = \left(2^x\right)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot x + x^2 + 1 =$$

$$= \left(\left(2^x\right)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot x + x^2\right) + 1 = \left(2^x - x\right)^2 + 1 > 0.$$

Vježba 483

Dokažite da za x > 0 vrijedi nejednakost $x^2 + 4^x + 1 > x \cdot 2^{x+1}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

X.

Zadatak 754 (Tomislav, srednja škola)

Pojednostavnite izraz: $\left(\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a\cdot c}-\sqrt{b}\right)^2$.

Rješenje 754

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left(\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a\cdot c}-\sqrt{b}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2+2\cdot\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{c}+\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a\cdot c}\right)^2-2\cdot\sqrt{a\cdot c}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2=$$

$$=a\cdot b+2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c}+c+a\cdot c-2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c}+b=a\cdot b+2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c}+c+a\cdot c-2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c}+b=$$

$$=a\cdot b+c+a\cdot c+b=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=(a\cdot b+b)+(a\cdot c+c)=b\cdot(a+1)+c\cdot(a+1)=(a+1)\cdot(b+c).$$

Vježba 754

Pojednostavnite izraz: $\left(\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{a\cdot c}\right)^2$.

Rezultat: $(a+1)\cdot(b+c)$.