Zadatak 788 (Luka, građevinska škola)

Pojednostavnite: $\frac{e^{3\cdot x}-1}{e^{x}-1}$.

Rješenje 788

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}.$$

$$a^{3}-b^{3}=(a-b)\cdot\left(a^{2}+a\cdot b+b^{2}\right) \quad , \quad a^{3}+b^{3}=(a+b)\cdot\left(a^{2}-a\cdot b+b^{2}\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

$$\frac{e^{3\cdot x}-1}{e^{x}-1}=\frac{\left(e^{x}\right)^{3}-1}{e^{x}-1}=\frac{\left(e^{x}-1\right)\cdot\left(\left(e^{x}\right)^{2}+e^{x}\cdot 1+1\right)}{e^{x}-1}=\frac{\left(e^{x}-1\right)\cdot\left(e^{2\cdot x}+e^{x}+1\right)}{e^{x}-1}=$$

$$=\frac{\left(e^{x}-1\right)\cdot\left(e^{2\cdot x}+e^{x}+1\right)}{e^{x}-1}=e^{2\cdot x}+e^{x}+1.$$

Vježba 788

Pojednostavnite: $\frac{e^{3\cdot x}+1}{e^{x}+1}$.

Rezultat: $e^{2\cdot x}-e^{x}+1.$

Zadatak 375 (Katarina, maturantica)

Brod je isplovio iz luke. Najprije je 2 sata plovio prema istoku brzinom 12 km / h, a onda se okrenuo prema sjeveru i 5 sati plovio brzinom 14 km / h. Koliko je nakon tih sati plovidbe bio udaljen od luke?

$$A.\ 69\ km \qquad B.\ 74\ km \qquad C.\ 79\ km \qquad D.\ 84\ km$$

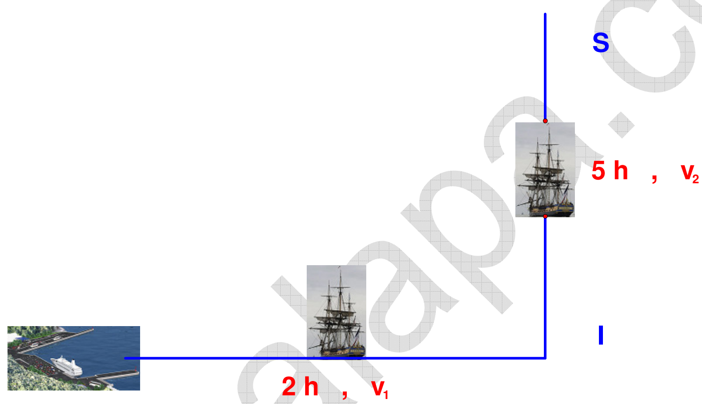
Rješenje 375

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

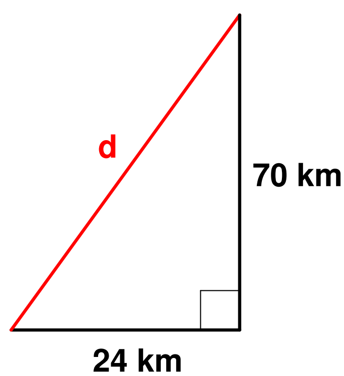


Ploveći prema istoku 2 sata brzinom v_1 = 12 km / h brod je prešao put od 24 km.

$$12\ \frac{km}{h} \cdot 2\ h = 24\ km.$$

Ploveći prema sjeveru 5 sati brzinom v_2 = 14 km / h prešao je put od 70 km.

$$14\ \frac{km}{h} \cdot 5\ h = 70\ km.$$



Iz pravokutnog trokuta pomoću Pitagorina poučka izračunamo hipotenuzu d (udaljenost broda od luke).

$$d^2 = (24\ km)^2 + (70\ km)^2 \Rightarrow d^2 = (24\ km)^2 + (70\ km)^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(24\ km)^2 + (70\ km)^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{džepno} \\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow d = 74\ km.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 375

Brod je isplovio iz luke. Najprije je 120 minuta plovio prema istoku brzinom 12 km / h, a onda se okrenuo prema sjeveru i 300 minuta plovio brzinom 14 km / h. Koliko je nakon tih sati plovidbe bio udaljen od luke?

$A.\ 69\ km \qquad B.\ 74\ km \qquad C.\ 79\ km \qquad D.\ 84\ km$

Rezultat: B.

3.

Zadatak 116 (Katarina, maturantica)

U prazan akvarij koji ima oblik kvadra duljine 50 cm, širine 30 cm i visine 40 cm uliveno je 18 litara vode. Do koje je visine voda ispunila akvarij? Napomena: 1 L = 1 dm^3.

$A.$ do 12 cm $B.$ do 14 cm $C.$ do 18 cm $D.$ do 20 cm

Rješenje 116

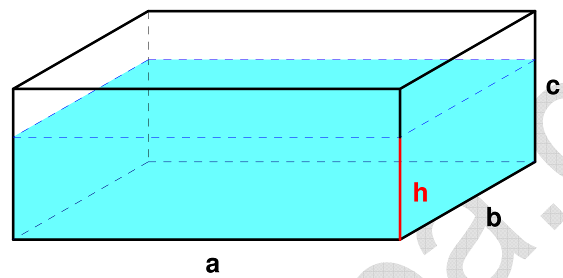
Ponovimo!

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.

Obujam kvadra računa se formulom

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

▶



Voda je ispunila akvarij do visine h pa vrijedi:

$$V = a \cdot b \cdot h \Rightarrow a \cdot b \cdot h = V \Rightarrow a \cdot b \cdot h = V \; / \cdot \frac{1}{a \cdot b} \Rightarrow h = \frac{V}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 18 \; L = 18 \; dm^3 \\ a = 50 \; cm = 5 \; dm \\ b = 30 \; cm = 3 \; dm \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{18 \; dm^3}{5 \; dm \cdot 3 \; dm} \Rightarrow h = 1.2 \; dm \Rightarrow h = 12 \; cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 116

U prazan akvarij koji ima oblik kvadra duljine 0.5 m, širine 0.3 m i visine 0.4 m uliveno je 18 litara vode. Do koje je visine voda ispunila akvarij? Napomena: 1 L = 1 dm^3.

$A.$ do 12 cm $B.$ do 14 cm $C.$ do 18 cm $D.$ do 20 cm

Rezultat: A.

4.

Zadatak 198 (Katarina, maturantica)

Odredite broj koji je za 172 manji od trostruke vrijednosti toga broja.

Rješenje 198

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a+n=b \quad , \quad a=b-n \quad , \quad b-a=n.$$

Kako zapisati n – terostruku vrijednost broja x?

$$n\cdot x.$$

▶

Neka je x traženi broj.

1.inačica

$$x+172=3\cdot x \;\Rightarrow\; x-3\cdot x=-172 \;\Rightarrow\; -2\cdot x=-172 \;\Rightarrow\; -2\cdot x=-172 \;/:(-2) \;\Rightarrow\; x=86.$$

2.inačica

$$x=3\cdot x-172 \;\Rightarrow\; x-3\cdot x=-172 \;\Rightarrow\; -2\cdot x=-172 \;\Rightarrow\; -2\cdot x=-172 \;/:(-2) \;\Rightarrow\; x=86.$$

3.inačica

$$3\cdot x-x=172 \;\Rightarrow\; 2\cdot x=172 \;\Rightarrow\; 2\cdot x=172 \;/:2 \;\Rightarrow\; x=86.$$

4.inačica

Budući da je broj x manji za 172 od svoje trostruke vrijednosti, znači da je njegova dvostruka vrijednost jednaka 172. Traženi broj iznosi:

$$172:2=86.$$

Vježba 198

Odredite broj koji je za 80 manji od trostruke vrijednosti toga broja.

Rezultat: 40.

Zadatak 373 (Katarina, maturantica)

Duljine stranica trokuta su u omjeru 4 : 5 : 6. Kolika je mjera najvećega kuta toga trokuta?

$$A.\ 68^\circ 21' \qquad B.\ 82^\circ 49' \qquad C.\ 90^\circ \qquad D.\ 120^\circ$$

Rješenje 373

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{aligned} a_1 : b_1 &= k \\ a_2 : b_2 &= k \\ a_3 : b_3 &= k \\ &\ldots \\ a_n : b_n &= k, \end{aligned}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

$$a : b : c = 4 : 5 : 6 \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 4\cdot t \\ b &= 5\cdot t \\ c &= 6\cdot t \Rightarrow \text{najveći kut } \gamma \end{aligned}\right\}.$$

Računamo mjeru kuta γ.

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{(4 \cdot t)^2 + (5 \cdot t)^2 - (6 \cdot t)^2}{2 \cdot 4 \cdot t \cdot 5 \cdot t}\right) \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{16 \cdot t^2 + 25 \cdot t^2 - 36 \cdot t^2}{40 \cdot t^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5 \cdot t^2}{40 \cdot t^2}\right) \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5 \cdot t^2}{40 \cdot t^2}\right) \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow \gamma = 82^\circ 49'.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 373

Duljine stranica trokuta su u omjeru 8 : 10 : 12. Kolika je mjera najvećega kuta toga trokuta?

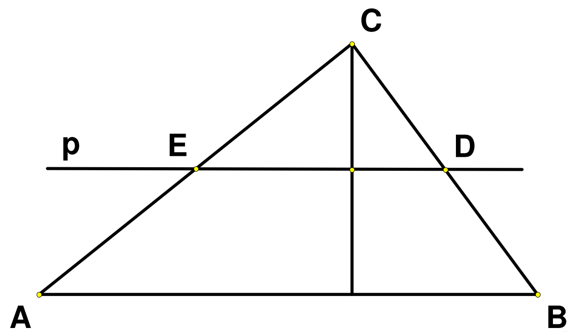
$A.\ 68^\circ 21' \qquad B.\ 82^\circ 49' \qquad C.\ 90^\circ \qquad D.\ 120^\circ$

Rezultat: B.

6.

Zadatak 374 (Katarina, maturantica)

Na skici su prikazani trokut ABC i pravac p. Pravac p prolazi polovištem visine iz vrha C toga trokuta i paralelan je sa stranicom $\overline{AB}$. Površina trokuta ABC je 5 cm^2. Kolika je površina trapeza ABDE?



Rješenje 374

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad i \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad a\cdot d=b\cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

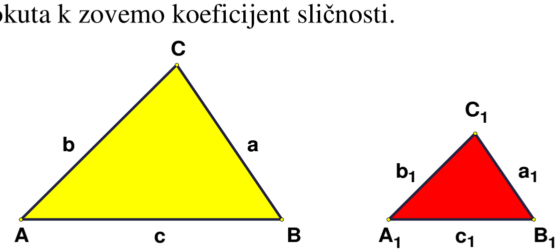
Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1 \; , \; \beta=\beta_1 \; , \; \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su

proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina pripadnih stranica.

$$\text{Ako je } \frac{a_1}{a} = k, \text{ tada je } \frac{P_1}{P} = k^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

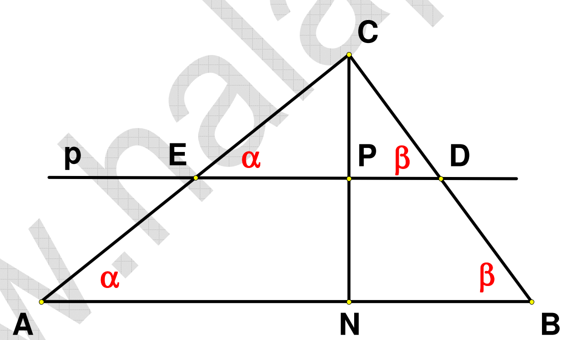
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).
Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v,$$

gdje su a i c duljine osnovica, v je visina trapeza.

▶

1.inačica



Sa slike vidi se:

$$|CP| = |PN| = \frac{1}{2} \cdot |CN| \ , \ |CN| = 2 \cdot |CP| \ , \ |CN| = 2 \cdot |PN|$$

Trokuti ΔABC i ΔEDC slični su (K – K) pa vrijedi razmjer:

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|CN|}{|CP|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|} = \frac{2 \cdot |CP|}{|CP|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|} = \frac{2 \cdot |CP|}{|CP|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|} = 2 \ / \cdot |ED| \Rightarrow |AB| = 2 \cdot |ED|.$$

Za omjer površina trokuta ΔABC i ΔEDC vrijedi:

$$\frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |ED| \cdot |CP|}{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CN|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |ED| \cdot |CP|}{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CN|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{|ED| \cdot |CP|}{|AB| \cdot |CN|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{|ED| \cdot |CP|}{2 \cdot |ED| \cdot 2 \cdot |CP|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{|ED| \cdot |CP|}{2 \cdot |ED| \cdot 2 \cdot |CP|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{1}{4} \; / \cdot P_{ABC} \Rightarrow P_{EDC} = \frac{1}{4} \cdot P_{ABC} \Rightarrow \left[P_{ABC} = 5 \; cm^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{EDC} = \frac{1}{4} \cdot 5 \; cm^2 \Rightarrow P_{EDC} = \frac{5}{4} \; cm^2.$$

Površina trapeza ABDE iznosi:

$$P_{ABDE} = P_{ABC} - P_{EDC} \Rightarrow P_{ABDE} = 5 \; cm^2 - \frac{5}{4} \; cm^2 \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{5}{1} \; cm^2 - \frac{5}{4} \; cm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE} = \frac{20-5}{4} \; cm^2 \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{15}{4} \; cm^2.$$

2.inačica

Visina trokuta EDC je **dva puta** manja od visine trokuta ABC. Zato je površina trokuta EDC **četiri puta** manja od površine trokuta ABC i iznosi:

$$P_{EDC} = \frac{1}{4} \cdot P_{ABC} \Rightarrow \left[P_{ABC} = 5 \; cm^2 \right] \Rightarrow P_{EDC} = \frac{1}{4} \cdot 5 \; cm^2 \Rightarrow P_{EDC} = \frac{5}{4} \; cm^2.$$

Površina trapeza ABDE iznosi:

$$P_{ABDE} = P_{ABC} - P_{EDC} \Rightarrow P_{ABDE} = 5 \; cm^2 - \frac{5}{4} \; cm^2 \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{5}{1} \; cm^2 - \frac{5}{4} \; cm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE} = \frac{20-5}{4} \; cm^2 \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{15}{4} \; cm^2.$$

3.inačica

Površina trapeza ABDE je:

$$P_{ABDE} = \frac{|AB| + |ED|}{2} \cdot |PN| \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{2 \cdot |ED| + |ED|}{2} \cdot |PN| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE} = \frac{3 \cdot |ED|}{2} \cdot |PN| \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{3}{2} \cdot |ED| \cdot |PN| \Rightarrow \begin{bmatrix} |ED| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \\ |PN| = \frac{1}{2} \cdot |CN| \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{1}{2} \cdot |CN| \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CN| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CN| \right) \Rightarrow \left[P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CN| \right] \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{3}{4} \cdot P_{ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[P_{ABC} = 5 \; cm^2 \right] \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{3}{4} \cdot 5 \; cm^2 \Rightarrow P_{ABDE} = \frac{15}{4} \; cm^2.$$

Vježba 374

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 222 (Katarina, maturantica)

Parabola je zadana jednadžbom $y^2 = 12 \cdot x$. Kolika je udaljenost fokusa te parabole od pravca $y = 2 \cdot x + 5$?

Rješenje 222

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x.$$

Žarište (fokus) ima koordinate:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

▶

Odredimo koordinate žarišta (fokusa) parabole.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ y^2 = 12 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \,/ : 2 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow \left[F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \right] \Rightarrow F\left(\frac{6}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{6}{2}, 0\right) \Rightarrow F(3, 0).$$

Jednadžbu zadanog pravca preoblikujemo u implicitni oblik.

$$y = 2 \cdot x + 5 \Rightarrow -2 \cdot x + y - 5 = 0 \Rightarrow -2 \cdot x + y - 5 = 0 \,/ \cdot (-1) \Rightarrow 2 \cdot x - y + 5 = 0.$$

Računamo udaljenost žarišta F od pravca.

$$\left.\begin{array}{l} F(x_\circ, y_\circ) = F(3, 0) \\ 2 \cdot x - y + 5 = 0 \\ A = 2 \;,\; B = -1 \;,\; C = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[d = \frac{|A \cdot x_\circ + B \cdot y_\circ + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right] \Rightarrow d = \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{|6 + 0 + 5|}{\sqrt{4 + 1}} \Rightarrow d = \frac{|11|}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{11}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{11}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} \Rightarrow d = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

Vježba 222

Odmor!

Rezultat: …

8.

Zadatak 081 (Katarina, maturantica)

Koja je završna točka vektora $\vec{v} = -5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}$ ako mu je početna točka (1, 2)?

$A.\ (-4,\ 12) \qquad B.\ (-4,\ -8) \qquad C.\ (6,\ -8) \qquad D.\ (6,\ 12)$

Rješenje 081

Ponovimo!

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada vrijedi: $\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$.

Ako su $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$ dva vektora, oni su jednaki ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake, tj. $a_x = b_x$ i $a_y = b_y$.

Ako je $a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} = c \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j}$, onda je a = c i b = d.

▶

Neka je B(x, y) završna točka vektora $\vec{v} = \vec{AB}$. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v} = \vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}\right] \Rightarrow \vec{v} = (x-1) \cdot \vec{i} + (y-2) \cdot \vec{j}.$$

Tražimo koordinate završne točke B.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (x-1) \cdot \vec{i} + (y-2) \cdot \vec{j} \\ \vec{v} = -5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 1 = -5 \\ y - 2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 + 1 \\ y = 10 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -4 \\ y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow B(x, y) = B(-4, 12).$$

Odgovor je pod A.

Vježba 081

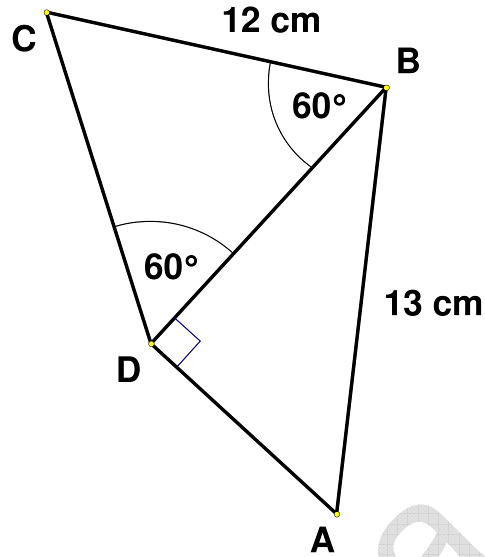
Koja je završna točka vektora $\vec{v} = 5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}$ ako mu je početna točka (1, 2)?

$A.\ (-4,\ 12) \qquad B.\ (-4,\ -8) \qquad C.\ (6,\ -8) \qquad D.\ (6,\ 12)$

Rezultat: D.

Zadatak 108 (Katarina, maturantica)

Koliki je opseg četverokuta ABCD prikazanoga na skici?



Rješenje 108

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Opseg četverokuta računa se po formuli:

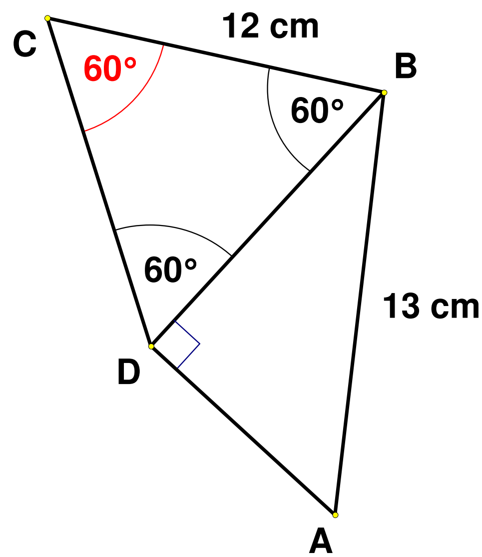
$$O = a + b + c + d,$$

gdje su a, b, c i d duljine njegovih stranica.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine i sva tri unutarnja kuta imaju 60º.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 13\ cm\ ,\ |BC| = 12\ cm\ ,\ \angle CDB = \angle DBC = \angle BCD = 60^{\circ}\ \text{jednakostraničan trokut}$$

$$|DB| = |BC| = |CD| = 12\ cm\ \text{jednakostraničan trokut}$$

Uočimo pravokutan trokut BDA za koji je duljina jedne katete $|DB|$ = 12 cm i hipotenuze $|AB|$ =13 cm. Duljinu katete $|DA|$ izračunamo pomoću Pitagorina poučka.

$$|DA|^2 = |AB|^2 - |DB|^2 \Rightarrow |DA|^2 = (13\ cm)^2 - (12\ cm)^2 \Rightarrow |DA|^2 = 169\ cm^2 - 144\ cm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DA|^2 = 25\ cm^2 \Rightarrow |DA|^2 = 25\ cm^2\ /\sqrt{\ } \Rightarrow |DA| = \sqrt{25\ cm^2} \Rightarrow |DA| = 5\ cm.$$

Opseg četverokuta ABCD iznosi:

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \Rightarrow \begin{bmatrix} |AB| = 13\ cm \\ |BC| = 12\ cm \\ |CD| = 12\ cm \\ |DA| = 5\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 13\ cm + 12\ cm + 12\ cm + 5\ cm \Rightarrow O = 42\ cm.$$

Vježba 108

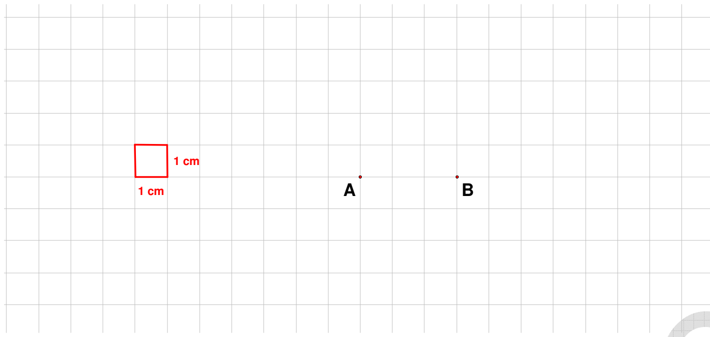
Odmor!

Rezultat: …

10.

Zadatak 372 (Katarina, maturantica)

Kvadratići u kvadratnoj mreži imaju stranice duljine 1 cm. U kvadratnu mrežu ucrtajte bilo koju točku C tako da površina trokuta ABC bude 6 cm^2.



Rješenje 372

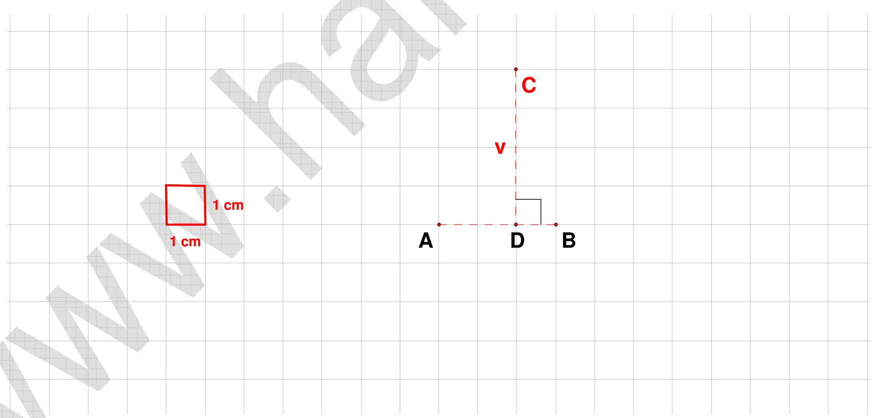
Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

▶



Neka je C treći vrh traženog trokuta ABC.
Sa slike vidi se:

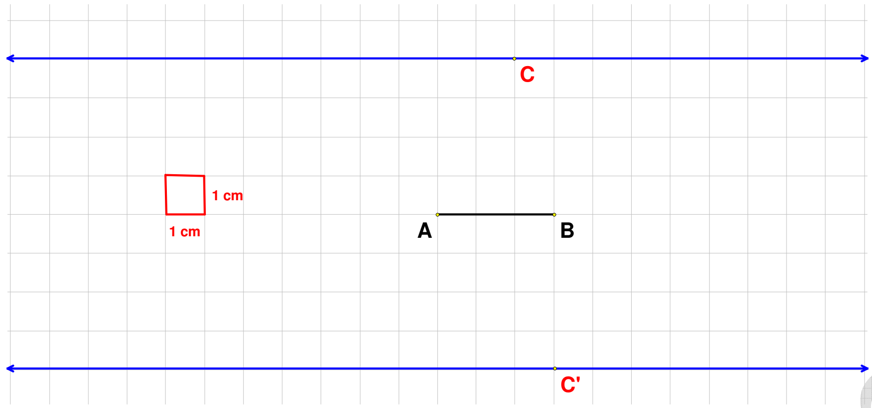
$$|AB| = 3\ cm \quad , \quad |CD| = v$$

Računamo duljinu visine v trokuta ABC.

$$P = \frac{|AB| \cdot v}{2} \Rightarrow \frac{|AB| \cdot v}{2} = P \Rightarrow \frac{|AB| \cdot v}{2} = P \ / \cdot \frac{2}{|AB|} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot P}{|AB|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{2 \cdot 6\ cm^2}{3\ cm} \Rightarrow v = 4\ cm.$$

Treći vrh C pripada pravcima koji su usporedni s dužinom $\overline{AB}$ i od nje udaljeni 4 cm.



Vježba 372

Odmor!

Rezultat: …