I.

Zadatak 208 (Luka, gimnazija)

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0,\ p \in R$ uz uvjet da je razlika rješenja te jednadžbe jednaka 4.

Rješenje 208

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot a \cdot b.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viѐteove formule:

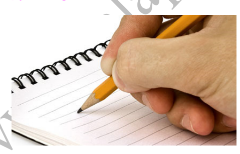
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



1.inačica

Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane kvadratne jednadžbe čija je razlika jednaka 4. Uz taj uvjet i Viѐteovu formulu izračunamo, na primjer, x_1.
Najprije odredimo koeficijente a, b i c.

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = p \\ c = 65 \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -\frac{p}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot x_1 = 4 - \frac{p}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_1 = 4 - \frac{p}{4} \ / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{p}{8}.$$

Dobili smo jedno rješenje jednadžbe. Uvrstimo ga u nju kako bismo izračunali p.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - \frac{p}{8} \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot \left(2 - \frac{p}{8}\right)^2 + p \cdot \left(2 - \frac{p}{8}\right) + 65 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot\left(4-\frac{p}{2}+\frac{p^2}{64}\right)+2\cdot p-\frac{p^2}{8}+65=0\ \Rightarrow\ 16-2\cdot p+\frac{p^2}{16}+2\cdot p-\frac{p^2}{8}+65=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 16-2\cdot p+\frac{p^2}{16}+2\cdot p-\frac{p^2}{8}+65=0\ \Rightarrow\ 16+\frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{8}+65=0\ \Rightarrow\ \frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{8}+81=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{8}+81=0\ /\cdot 16\ \Rightarrow\ p^2-2\cdot p^2+1296=0\ \Rightarrow\ -p^2+1296=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -p^2=-1296\ \Rightarrow\ -p^2=-1296\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ p^2=1296\ \Rightarrow\ p^2=1296\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p_{1,2}=\pm\sqrt{1296}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}p_1=-36\\ p_2=36\end{matrix}\right\}.$$

- Za p = – 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{matrix}p=-36\\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ 4\cdot x^2-36\cdot x+65=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}4\cdot x^2-36\cdot x+65=0\\ a=4\ ,\ b=-36\ ,\ c=65\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right]\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-36)\pm\sqrt{(-36)^2-4\cdot 4\cdot 65}}{2\cdot 4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{1296-1040}}{8}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{256}}{8}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{36\pm 16}{8}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{36+16}{8}\\ x_2=\dfrac{36-16}{8}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{52}{8}\\ x_2=\dfrac{20}{8}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{52}{8}\\ x_2=\dfrac{20}{8}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{13}{2}\\ x_2=\dfrac{5}{2}\end{matrix}\right\}.$$

- Za p = 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{matrix}p=36\\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ 4\cdot x^2+36\cdot x+65=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}4\cdot x^2+36\cdot x+65=0\\ a=4\ ,\ b=36\ ,\ c=65\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right]\ \Rightarrow\ x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 4\cdot 65}}{2\cdot 4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{1296-1040}}{8}\ \Rightarrow\ x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{256}}{8}\ \Rightarrow\ x_{3,4}=\frac{-36\pm 16}{8}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_3=\dfrac{-36+16}{8}\\ x_4=\dfrac{-36-16}{8}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_3=\dfrac{-20}{8}\\ x_4=\dfrac{-52}{8}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_3=\dfrac{-20}{8}\\ x_4=\dfrac{-52}{8}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_3=-\dfrac{5}{2}\\ x_4=-\dfrac{13}{2}\end{matrix}\right\}.$$

2.inačica

Pomoću identiteta dobije se:

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4\cdot x_1\cdot x_2 \Rightarrow (x_1-x_2)^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1-x_2=4 \\ b=p\ ,\ a=4\ ,\ c=65 \end{bmatrix} \Rightarrow 4^2=\left(-\frac{p}{4}\right)^2-4\cdot\frac{65}{4} \Rightarrow 16=\frac{p^2}{16}-4\cdot\frac{65}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16=\frac{p^2}{16}-65 \Rightarrow \frac{p^2}{16}-65=16 \Rightarrow \frac{p^2}{16}=16+65 \Rightarrow \frac{p^2}{16}=81 \Rightarrow \frac{p^2}{16}=81\ /\cdot 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2=81\cdot 16 \Rightarrow p^2=9^2\cdot 4^2 \Rightarrow p^2=(9\cdot 4)^2 \Rightarrow p^2=36^2 \Rightarrow p^2=36^2\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2}=\pm 36 \Rightarrow \left.\begin{matrix} p_1=-36 \\ p_2=36 \end{matrix}\right\}.$$

- Za p = – 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{matrix} p=-36 \\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\cdot x^2-36\cdot x+65=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4\cdot x^2-36\cdot x+65=0 \\ a=4\ ,\ b=-36\ ,\ c=65 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \right] \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-36)\pm\sqrt{(-36)^2-4\cdot 4\cdot 65}}{2\cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{1296-1040}}{8} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{36\pm 16}{8} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{36+16}{8} \\ x_2=\frac{36-16}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{52}{8} \\ x_2=\frac{20}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{52}{8} \\ x_2=\frac{20}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{13}{2} \\ x_2=\frac{5}{2} \end{matrix}\right\}.$$

- Za p = 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{matrix} p=36 \\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\cdot x^2+36\cdot x+65=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4\cdot x^2+36\cdot x+65=0 \\ a=4\ ,\ b=36\ ,\ c=65 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \right] \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 4\cdot 65}}{2\cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{1296-1040}}{8} \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm 16}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=\frac{-36+16}{8} \\ x_4=\frac{-36-16}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=\frac{-20}{8} \\ x_4=\frac{-52}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=\frac{-20}{8} \\ x_4=\frac{-52}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=-\frac{5}{2} \\ x_4=-\frac{13}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 208

Nema vježbe! Može vic?

Rezultat: Donio Mujo brončanu medalju s matematičke olimpijade.
Pita ga Haso: "Kako si ti osvojio brončanu medalju?"
Mujo odgovori: "Pa pitali nas koliko je 7 puta 3 i ja s 19 osvojio treće mjesto!"

II.

Zadatak 365 (Matej, gimnazija)

Kružnici polumjera r = 3.6 cm upisan je trokut kojem su dvije stranice dugačke 5 cm i 5.8 cm. Koliki su kutovi tog trokuta i kolika je duljina treće stranice?

Rješenje 365

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R\quad,\quad\frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R\quad,\quad\frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R\quad,\quad\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^{2}=a^{2}+c^{2}-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Neka su, na primjer, a = 5 cm i b = 5.8 cm, a r = 3.6 cm. Mjere kutova α i β dobijemo pomoću poučka o sinusu.

Kut α

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot r\;\Rightarrow\;2\cdot r=\frac{a}{\sin\alpha}\;\Rightarrow\;2\cdot r=\frac{a}{\sin\alpha}\;/\cdot\frac{\sin\alpha}{2\cdot r}\;\Rightarrow\;\sin\alpha=\frac{a}{2\cdot r}\;\Rightarrow\;\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{a}{2\cdot r}\right)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\ cm\\ r=3.6\ cm\end{array}\right]\Rightarrow\;\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{5\ cm}{2\cdot 3.6\ cm}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{array}\right]\Rightarrow\;\alpha=43^{\circ}\,58'59''.$$

Kut β

$$\frac{b}{\sin\beta}=2\cdot r\;\Rightarrow\;2\cdot r=\frac{b}{\sin\beta}\;\Rightarrow\;2\cdot r=\frac{b}{\sin\beta}\;/\cdot\frac{\sin\beta}{2\cdot r}\;\Rightarrow\;\sin\beta=\frac{b}{2\cdot r}\;\Rightarrow\;\beta=\sin^{-1}\left(\frac{b}{2\cdot r}\right)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=5.8\ cm\\ r=3.6\ cm\end{array}\right]\Rightarrow\;\beta=\sin^{-1}\left(\frac{5.8\ cm}{2\cdot 3.6\ cm}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{array}\right]\Rightarrow\;\alpha=53^{\circ}\,39'50''.$$

Mjera kuta γ iznosi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}\;\Rightarrow\;\gamma=180^{\circ}-(\alpha+\beta)\;\Rightarrow\;\gamma=180^{\circ}-\left(43^{\circ}\,58'59''+53^{\circ}\,39'50''\right)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{array}\right]\Rightarrow\;\gamma=82^{\circ}\,21'11''.$$

Duljinu treće stranice c trokuta možemo izračunati na više načina.

1.inačica

Rabimo kosinusov poučak.

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\ \Rightarrow\ c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} a=5\ cm \\ b=5.8\ cm \\ \gamma=82^\circ\,21'11'' \end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c=\sqrt{5^2+5.8^2-2\cdot5\cdot5.8\cdot\cos\left(82^\circ\,21'11''\right)}\ \Rightarrow\ c=7.1\ cm.$$

2.inačica

Rabimo sinusov poučak.

$$c:a=\sin\gamma:\sin\alpha\ \Rightarrow\ c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma\ \Rightarrow\ c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma\ /\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} a=5\ cm \\ \gamma=82^\circ\,21'11'' \\ \alpha=43^\circ\,58'59'' \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ c=\frac{5\ cm\cdot\sin\left(82^\circ\,21'11''\right)}{\sin\left(43^\circ\,58'59''\right)}\ \Rightarrow\ c=7.1\ cm.$$

3.inačica

Rabimo sinusov poučak.

$$c:b=\sin\gamma:\sin\beta\ \Rightarrow\ c\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\gamma\ \Rightarrow\ c\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\gamma\ /\cdot\frac{1}{\sin\beta}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c=\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} b=5.8\ cm \\ \gamma=82^\circ\,21'11'' \\ \beta=53^\circ\,39'50'' \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ c=\frac{5.8\ cm\cdot\sin\left(82^\circ\,21'11''\right)}{\sin\left(53^\circ\,39'50''\right)}\ \Rightarrow\ c=7.1\ cm.$$

Vježba 365

Kružnici polumjera r = 36 mm upisan je trokut kojem su dvije stranice dugačke 5 cm i 58 mm. Koliki su kutovi tog trokuta i kolika je duljina treće stranice?

Rezultat: 43^0 58' 59", 53^0 39' 50", 82^0 21' 11", 7.1 cm.

III.

Zadatak 077 (Ana, građevinska škola)

U točki A(2, 1, – 1) djeluje sila $\vec{r}$ iznosa $\left|\vec{r}\right| = 7.$ Ako imamo dvije komponente sile $r_x = 2$, $r_y = -3$ i $r_z > 0$, odredite krajnju točku B vektora $\vec{r}$ te bar jedan kut koji vektor $\vec{r} = \vec{AB}$ zatvara s koordinatnim osima. Koliko ima takvih kutova?

Rješenje 077

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Duljina vektora $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ definira se $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

Ako su dane točke A(x_1, y_1, z_1) i B(x_2, y_2, z_2), onda su koordinate vektora koji ih spaja:

$$\vec{AB} = \left(x_2 - x_1\right) \cdot \vec{i} + \left(y_2 - y_1\right) \cdot \vec{j} + \left(z_2 - z_1\right) \cdot \vec{k}.$$

Ako su $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ dva vektora, oni su jednaki ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake, tj. $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $.a_z = b_z.$

Kutovi koje vektor $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ zatvara s koordinatnim osima x, y i z glase:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}\right), \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}\right).$$

Najprije nađemo treću koordinatu (komponentu) vektora $\vec{r}$, ako su zadane prve dvije i modul.

$$\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_x = 2 \\ r_y = -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}.$$

Iz uvjeta $\left|\vec{r}\right| = 7$ slijedi:

$$\vec{r} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k} \Rightarrow \left|\vec{r}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + r_z^2} \Rightarrow \left[\left|\vec{r}\right| = 7\right] \Rightarrow 7 = \sqrt{4 + 9 + r_z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 = \sqrt{13 + r_z^2} \Rightarrow \sqrt{13 + r_z^2} = 7 \Rightarrow \sqrt{13 + r_z^2} = 7 \,/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{13 + r_z^2}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 + r_z^2 = 49 \Rightarrow r_z^2 = 49 - 13 \Rightarrow r_z^2 = 36 \Rightarrow r_z^2 = 36 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow r_z = \pm\sqrt{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} r_z = -6 \\ r_z = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{uvjet} \\ r_z > 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow r_z = 6.$$

Vektor glasi:

$$\vec{r} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}.$$

Odredimo vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{matrix} A(x_1, y_1, z_1) = A(2, 1, -1) \\ B(x_2, y_2, z_2) = B(x, y, z) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x-2) \cdot \vec{i} + (y-1) \cdot \vec{j} + (z-(-1)) \cdot \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x-2) \cdot \vec{i} + (y-1) \cdot \vec{j} + (z+1) \cdot \vec{k}.$$

Budući da je vektor $\vec{r}$ zadan točkama A i B, možemo napisati:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k} = (x-2) \cdot \vec{i} + (y-1) \cdot \vec{j} + (z+1) \cdot \vec{k} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{jednakost} \\ \text{vektora} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 = x - 2 \\ -3 = y - 1 \\ 6 = z + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 2 = 2 \\ y - 1 = -3 \\ z + 1 = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 + 2 \\ y = -3 + 1 \\ z = 6 - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{matrix}\right\}.$$

Točka B ima koordinate:

$$B(x, y, z) = B(4, -2, 5).$$

Kut koji vektor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ zatvara s koordinatnom osi x iznosi:

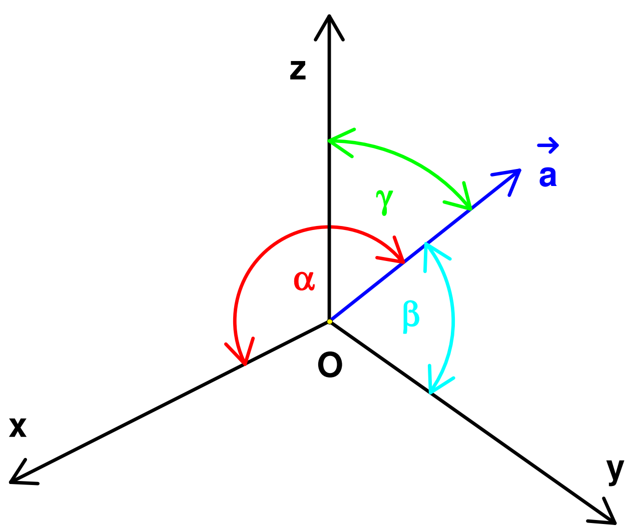
$$\cos\alpha = \frac{r_x}{\left|\vec{r}\right|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{r_x}{\left|\vec{r}\right|}\right) \Rightarrow \left[\begin{matrix} r_x = 2 \\ \left|\vec{r}\right| = 7 \end{matrix}\right] \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) \Rightarrow \alpha = 73^\circ 23'5''.$$

Postoje tri kuta:

- α – kut koji vektor zatvara s osi x
- β – kut koji vektor zatvara s osi y
- γ – kut koji vektor zatvara s osi z.

Za njih vrijedi:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$



Vježba 077

U točki A(2, 1, – 1) djeluje sila $\vec{r}$ iznosa $\left|\vec{r}\right| = 7.$ Ako imamo dvije komponente sile $r_x = 2$, $r_z = 6$ i $r_y < 0$, odredite krajnju točku B vektora $\vec{r}$.

Rezultat: $B(4, -2, 5).$

IV.

Zadatak 086 (Iva, gimnazija)

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 3 m postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 1500 L. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$A.\ 0.265\ m \qquad B.\ 0.795\ m \qquad C.\ 0.9\ m \qquad D.\ 2.5\ m$

Rješenje 086

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

$$1\ L = 1\ dm^3 = 1 \cdot 10^{-3}\ m^3.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

1.inačica

Za 5 sati spremnik se napuni sa 7.5 m^3 vode.

$$V = 5 \cdot 1500\ L \Rightarrow V = 7500\ L \Rightarrow V = 7500\ dm^3 \Rightarrow V = 7.5\ m^3.$$

Računamo za koliko se podigla razina vode u spremniku.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 7.5\ m^3 \\ r = 3\ m \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{7.5\ m^3}{(3\ m)^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = 0.265\ m.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Najprije izračunamo visinu valjka koji ima polumjer baze r = 3 m i obujam 1.5 m^3.

$$V = 1500\ L \Rightarrow V = 1500\ dm^3 \Rightarrow V = 1.5\ m^3.$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 1.5\ m^3 \\ r = 3\ m \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{1.5\ m^3}{(3\ m)^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = 0.053\ m.$$

Dakle, za 1 sat razina vode podigne se za 0.053 m.
Za 5 sati razina vode porast će za

$$5 \cdot 0.053\ \text{m} = 0.265\ \text{m}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 086

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 3 m postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 15 hl. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$A.\ 0.265\ m \qquad B.\ 0.795\ m \qquad C.\ 0.9\ m \qquad D.\ 2.5\ m$

Rezultat: A.

V.

Zadatak 076 (Ana, gimnazija)

Odredite vektor $\vec{b}$ ako je kolinearan s vektorom $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$, a $\left|\vec{b}\right| = 3 \cdot \sqrt{5}$.

Rješenje 076

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Duljina vektora $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ definira se $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Za dva vektora dana sa svojim koordinatama

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \text{ i } \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$$

kažemo da su kolinearni ako postoji skalar k (realan broj) takav da vrijedi:

- $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$
- $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = k.$

Za realan broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad , \quad |x| = a \ , \ a > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{array}\right\}.$$

1.inačica

Vektor $\vec{b}$ kolinearan je s vektorom $\vec{a}$, a to znači da je

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a},$$

pri čemu je k realan broj različit od nule. I nadalje, zahtjeva se

$$\left|\vec{b}\right| = \left|k \cdot \vec{a}\right| \Rightarrow \left|\vec{b}\right| = |k| \cdot \left|\vec{a}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\vec{b}\right| = 3 \cdot \sqrt{5} \\ \vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j} \end{array}\right] \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{4+1} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{5} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{5} \ /:\sqrt{5} \Rightarrow 3 = |k| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |k| = 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = 3 \end{array}\right\}.$$

Odatle slijedi da postoje dva vektora.

$$\left.\begin{aligned}\vec{b}_1&=-3\cdot\left(-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\\ \vec{b}_2&=3\cdot\left(-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\vec{b}_1&=6\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}\\ \vec{b}_2&=-6\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}\end{aligned}\right\}.$$

2.inačica

Neka je $\vec{b}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$ i $\left|\vec{b}\right|=3\cdot\sqrt{5}$. Tada je

$$\left.\begin{aligned}\left|\vec{b}\right|&=\sqrt{x^2+y^2}\\ \left|\vec{b}\right|&=3\cdot\sqrt{5}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=3\cdot\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=3\cdot\sqrt{5}\ /^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\left(3\cdot\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow x^2+y^2=3^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow x^2+y^2=9\cdot5\Rightarrow x^2+y^2=45.$$

Vektori $\vec{b}$ i $\vec{a}$ kolinearni su pa vrijedi:

$$\left.\begin{aligned}\vec{b}&=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}\\ \vec{a}&=-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{x}{-2}&=k\\ \frac{y}{1}&=k\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{x}{-2}&=k\ /\cdot(-2)\\ y&=k\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x&=-2\cdot k\\ y&=k\end{aligned}\right\}.$$

Riješimo jednadžbu po varijabli k.

$$x^2+y^2=45\Rightarrow\left[\begin{aligned}x&=-2\cdot k\\ y&=k\end{aligned}\right]\Rightarrow(-2\cdot k)^2+k^2=45\Rightarrow4\cdot k^2+k^2=45\Rightarrow5\cdot k^2=45\Rightarrow$$

$$\Rightarrow5\cdot k^2=45\ /:5\Rightarrow k^2=9\Rightarrow k^2=9\ /\sqrt{\ }\Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\left.\begin{aligned}k_1&=-3\\ k_2&=3\end{aligned}\right\}.$$

Odatle slijedi da postoje dva vektora.

$$\left.\begin{aligned}\vec{b}_1&=-3\cdot\left(-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\\ \vec{b}_2&=3\cdot\left(-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\vec{b}_1&=6\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}\\ \vec{b}_2&=-6\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}\end{aligned}\right\}.$$

Vježba 076

Nema vježbe, odmorite se!

Rezultat: ☺

VI.

Zadatak 181 (Berači jabuka ☺, gimnazija)

Na plantaži jabuka sedam radnika može obaviti berbu za 22 dana. Nakon četiri dana berbe pokazala se potreba da berba završi za narednih 14 dana. Koliko najmanje novih radnika treba zaposliti od petog dana? Pretpostavlja se da svi radnici rade jednakim tempom.

Rješenje 181

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{a}{b}=1 \;\Rightarrow\; a=b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \;\text{ ili }\; \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad i \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \;\Rightarrow\; a\cdot d=b\cdot c.$$

Za dvije veličine kažemo da su obrnuto proporcionalne (razmjerne) ako vrijede pravila:

- koliko se puta poveća prva veličina, toliko se puta smanji druga veličina
- koliko se puta smanji prva veličina, toliko se puta poveća druga veličina.

Precizno definirano:
Za dvije veličine x i y kažemo da su obrnuto proporcionalne (razmjerne) ako je njihov umnožak (produkt) stalan:

$$x\cdot y=\text{konstantno}.$$

1.inačica

Ako 7 radnika za 22 dana obave berbu tada oni za 1 dan obave $\frac{1}{22}$ berbe, a 1 radnik za 1 dan obavi

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{22}=\frac{1}{154}$$

berbe. Prva četiri dana radilo je svih sedam i obavili su

$$4\cdot 7\cdot\frac{1}{154}=\frac{28}{154}=\frac{28}{154}=\frac{2}{11}$$

berbe. Ostalo je

$$1-\frac{2}{11}=\frac{1}{1}-\frac{2}{11}=\frac{11-2}{11}=\frac{9}{11}$$

berbe. Sada se dovede x novih radnika i taj ostatak berbe mora obaviti 7 + x radnika za 14 dana. Budući da jedan radnik za jedan dan obavi $\frac{1}{154}$ berbe to 7 + x radnika za 1 dan obavi

$$\frac{7+x}{154}$$

berbe te će $\frac{9}{11}$ berbe biti obavljeno za 14 dana. Postavimo jednadžbu:

$$\frac{9}{11}:\frac{7+x}{154}=14\ \Rightarrow\ \frac{9}{11}\cdot\frac{154}{7+x}=14\ \Rightarrow\ \frac{9}{11}\cdot\frac{154}{7+x}=14\ \Rightarrow\ \frac{9}{1}\cdot\frac{14}{7+x}=14\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{9\cdot 14}{7+x}=14\ \Rightarrow\ \frac{9\cdot 14}{7+x}=14\ /:14\ \Rightarrow\ \frac{9}{7+x}=1\ \Rightarrow\ 7+x=9\ \Rightarrow\ x=9-7\ \Rightarrow\ x=2.$$

Najmanje treba zaposliti 2 radnika.

2.inačica

Sedam radnika može obaviti berbu za 22 dana.
Jedan radnik bi to učinio za

$$7\cdot 22=154$$

dana.
Sedam radnika radilo je 4 dana.
Jedan radnik taj dio berbe obavio bi za

$$7\cdot 4=28$$

dana. Jedan radnik bi preostali dio berbe obavio za

$$154-28=126$$

dana. Ostatak posla mora se završiti za 14 dana. To može napraviti

$$126:14=9$$

radnika. Budući da već 7 radnika radi, treba još zaposliti najmanje

$$9-7=2$$

radnika.

3.inačica

Ukupnu količinu posla koju 7 radnika treba obaviti za 22 dana možemo izraziti brojem

$$7\cdot 22.$$

Za 4 dana zajedničke berbe njih 7 obavilo je

$$7\cdot 4$$

dijela ukupne berbe. Neka je x broj novih radnika. Tada bi 7 + x radnika trebalo obaviti ostatak berbe za 14 dana. Za 14 dana tih 7 + x radnika završilo bi

$$(7+x)\cdot 14$$

dijela ukupne berbe. Vrijedi jednadžba:

$$7\cdot 22=7\cdot 4+(7+x)\cdot 14 \;\Rightarrow\; 7\cdot 22=7\cdot 4+(7+x)\cdot 14 \;/:7 \;\Rightarrow\; 22=4+(7+x)\cdot 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 22=4+(7+x)\cdot 2 \;/:2 \;\Rightarrow\; 11=2+7+x \;\Rightarrow\; 2+7+x=11 \;\Rightarrow\; x=11-2-7 \;\Rightarrow\; x=2.$$

Najmanje treba zaposliti 2 radnika.

4.inačica

Nakon što je 7 radnika bralo 4 dana, ostatak berbe bi njih 7 obavilo za još

$$22-4=18$$

dana. Međutim, nakon dolaska x novih radnika, isti dio berbe treba obaviti 7 + x radnika. Iz sheme za ostatak posla dobije se razmjer.

$$\uparrow \quad \begin{array}{rl} 7 \text{ radnika} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 18 \text{ dana} \\ 7+x \text{ radnika} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 14 \text{ dana} \end{array} \quad \downarrow$$

Strjelicu uvijek **vučemo od x**. Postavi da nepoznanica x bude u **donjem** redu.
Prva rečenica je uvjetna, a druga upitna pa kažemo: "Ako 7 radnika obave neki posao za 18 dana, hoće li 7 + x djelatnika obaviti isti posao za **više ili manje** dana?". Odgovor je **manje**! Znači da su veličine obrnuto proporcionalne pa druga strjelica mora imati **suprotan smjer** od one uz nepoznanicu x.
Postavimo razmjer u skladu sa smjerom strjelica (počinje se od početka strjelice, a završava s krajem strjelice)

$$(7+x):7=18:14 \;\Rightarrow\; 14\cdot(7+x)=7\cdot 18 \;\Rightarrow\; 14\cdot(7+x)=7\cdot 18 \;/:7 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot(7+x)=18 \;\Rightarrow\; 2\cdot(7+x)=18 \;/:2 \;\Rightarrow\; 7+x=9 \;\Rightarrow\; x=9-7 \;\Rightarrow\; x=2.$$

Najmanje treba zaposliti 2 radnika.

Vježba 181

Probajte zadatak riješiti sa plantažom krušaka!

Rezultat: ☺

VII.

Zadatak 241 (Dora, gimnazija)

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi osmi član toga niza?

Rješenje 241

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.
Niz možemo zadati rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati.
Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a + n = b \quad , \quad a = b - n \quad , \quad b - a = n.$$

1.inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

- $a_2 = a_1 - 0.7 = 10 - 0.7 = 9.3$
- $a_3 = a_2 - 0.7 = 9.3 - 0.7 = 8.6$
- $a_4 = a_3 - 0.7 = 8.6 - 0.7 = 7.9$
- $a_5 = a_4 - 0.7 = 7.9 - 0.7 = 7.2$
- $a_6 = a_5 - 0.7 = 7.2 - 0.7 = 6.5$
- $a_7 = a_6 - 0.7 = 6.5 - 0.7 = 5.8$
- $a_8 = a_7 - 0.7 = 5.8 - 0.7 = 5.1.$

2.inačica

Uočimo da je svaki član zadanog niza, osim prvoga člana, za 0.7 manji od prethodnog člana. To znači da je a_8 za 4.9 manji od a_1.

$$7 \cdot 0.7 = 4.9.$$

Osmi član jednak je

$$a_8 = a_1 - 4.9 \Rightarrow \left[a_1 = 10 \right] \Rightarrow a_8 = 10 - 4.9 \Rightarrow a_8 = 5.1.$$

3.inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 - 0.7 \\ a_3 = a_2 - 0.7 \\ a_4 = a_3 - 0.7 \\ a_5 = a_4 - 0.7 \\ a_6 = a_5 - 0.7 \\ a_7 = a_6 - 0.7 \\ a_8 = a_7 - 0.7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$$

$$= a_1 - 0.7 + a_2 - 0.7 + a_3 - 0.7 + a_4 - 0.7 + a_5 - 0.7 + a_6 - 0.7 + a_7 - 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$$

$$= a_1 - 0.7 + a_2 - 0.7 + a_3 - 0.7 + a_4 - 0.7 + a_5 - 0.7 + a_6 - 0.7 + a_7 - 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_8 = a_1 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 \Rightarrow a_8 = a_1 - 7 \cdot 0.7 \Rightarrow a_8 = a_1 - 4.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_1 = 10 \right] \Rightarrow a_8 = 10 - 4.9 \Rightarrow a_8 = 5.1.$$

Vježba 241

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi peti član toga niza?

Rezultat: 7.2.

VIII.

Zadatak 180 (Marina, gimnazija)

Marko ima plave i zelene kuglice. Spremio ih je u pet vrećica tako da se u njima nalazilo redom 7, 9, 10, 14 i 19 kuglica. Jednu vrećicu poklonio je Ani i ostalo mu je točno dva puta više plavih nego zelenih kuglica. Koliko je kuglica bilo u vrećici koju je poklonio Ani?

Rješenje 180

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

Kako zapisati da je broj a n puta veći od broja b?

$$a = n \cdot b \quad , \quad \frac{a}{n} = b \quad , \quad \frac{a}{b} = n.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N i pišemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Marko ukupno ima 59 kuglica.

$$7 + 9 + 10 + 14 + 19 = 59.$$

Kada je jednu vrećicu poklonio Ani ostalo mu je:

$$59 - 7 = 52 \quad \text{ili} \quad 59 - 9 = 50 \quad \text{ili} \quad 59 - 10 = 49 \quad \text{ili} \quad 59 - 14 = 45 \quad \text{ili} \quad 59 - 19 = 40$$

kuglica.
Marku je ostalo točno dva puta više plavih nego zelenih kuglica.
Neka je x broj zelenih kuglica koje Marko ima. Tada je 2 · x broj plavih kuglica. Dakle, ukupan broj svih preostalih kuglica jednak je 3 · x.
Zbog toga treba utvrditi koja od pet jednadžba ima cjelobrojno rješenje u skupu prirodnih brojeva:

- $3 \cdot x = 52 \Rightarrow 3 \cdot x = 52 \;/:3 \Rightarrow x = \frac{52}{3} \notin N$
- $3 \cdot x = 50 \Rightarrow 3 \cdot x = 50 \;/:3 \Rightarrow x = \frac{50}{3} \notin N$
- $3 \cdot x = 49 \Rightarrow 3 \cdot x = 49 \;/:3 \Rightarrow x = \frac{49}{3} \notin N$
- $3 \cdot x = 45 \Rightarrow 3 \cdot x = 45 \;/:3 \Rightarrow x = 15 \in N$
- $3 \cdot x = 40 \Rightarrow 3 \cdot x = 40 \;/:3 \Rightarrow x = \frac{40}{3} \notin N.$

Od pet jednadžba samo jednoj je rješenje prirodan broj.
U Aninoj vrećici bilo je 14 kuglica, (59 – 45 = 14).

Vježba 180

Marko ima plave i zelene kuglice. Spremio ih je u pet vrećica tako da se u njima nalazilo redom 7, 9, 10, 14 i 19 kuglica. Jednu vrećicu poklonio je Ani i ostalo mu je točno dva puta više plavih nego zelenih kuglica. Koliko je kuglica imao Marko?

Rezultat: 45.

IX.

Zadatak 492 (Monika, srednja škola)

Zadane su funkcije $f(x)=2\cdot x+1$ i $g(x)=2^x-9$. Riješite jednadžbu $(g\circ f)(x)=-4^x$.

Rješenje 492

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))\quad,\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$
$$\rightarrow$$

$$\log_b a^n=n\cdot\log_b a\quad,\quad \log_b b=1.$$

$$(g\circ f)(x)=-4^x\ \Rightarrow\ g(f(x))=-4^x\ \Rightarrow\ g(f(x))=-4^x\ \Rightarrow\ \left[\,g(x)=2^x-9\,\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{f(x)}-9=-4^x\ \Rightarrow\ 2^{f(x)}-9=-4^x\ \Rightarrow\ \left[\,f(x)=2\cdot x+1\,\right]\ \Rightarrow\ 2^{2\cdot x+1}-9=-4^x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{2\cdot x}\cdot 2^1-9=-4^x\ \Rightarrow\ \left(2^2\right)^x\cdot 2-9=-4^x\ \Rightarrow\ 4^x\cdot 2-9=-4^x\ \Rightarrow\ 2\cdot 4^x-9=-4^x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot 4^x+4^x=9\ \Rightarrow\ 3\cdot 4^x=9\ \Rightarrow\ 3\cdot 4^x=9\ /:3\ \Rightarrow\ 4^x=3\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{logaritmiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{array}\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4^x=3\ /\log_4\ \Rightarrow\ \log_4 4^x=\log_4 3\ \Rightarrow\ x\cdot\log_4 4=\log_4 3\ \Rightarrow\ x\cdot 1=\log_4 3\ \Rightarrow\ x=\log_4 3.$$

Vježba 492

Zadane su funkcije $f(x)=2\cdot x+1$ i $g(x)=2^x-9$. Riješite jednadžbu $(g\circ f)(x)+4^x=0$.

Rezultat: $x=\log_4 3.$

X.

Zadatak 115 (4B, TUPŠ)

Ako se duljine svih bridova kvadra povećaju tri puta, koliko se puta poveća njegovo oplošje?

Rješenje 115

REPETITIO MATER STUDIORUM EST.
PONAVLJANJE JE MAJKA ZNANJA.

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.

Oplošje kvadra računa se formulom

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Kako zapisati da je broj a n puta veći od broja b?

$$a = n \cdot b \quad , \quad \frac{a}{n} = b \quad , \quad \frac{a}{b} = n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Neka je zadan kvadar duljina bridova a, b i c. Njegovo je oplošje

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Ako se duljine svih bridova kvadra povećaju tri puta, slijedi:

$$a_1 = 3 \cdot a \ , \ b_1 = 3 \cdot b \ , \ c_1 = 3 \cdot c.$$

Tada oplošje iznosi:

$$O_1 = 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1).$$

Računamo koliko se puta poveća njegovo oplošje.

1.inačica

$$\frac{O_1}{O} = \frac{2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1)}{2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1)}{2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 3 \cdot a \\ b_1 = 3 \cdot b \\ c_1 = 3 \cdot c \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{3 \cdot a \cdot 3 \cdot b + 3 \cdot a \cdot 3 \cdot c + 3 \cdot b \cdot 3 \cdot c}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{9 \cdot a \cdot b + 9 \cdot a \cdot c + 9 \cdot b \cdot c}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{9 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{9 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1}{O} = 9 \Rightarrow \frac{O_1}{O} = 9 \ / \cdot O \Rightarrow O_1 = 9 \cdot O.$$

2.inačica

$$O_1 = 2 \cdot \left(a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1 \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 3 \cdot a \\ b_1 = 3 \cdot b \\ c_1 = 3 \cdot c \end{bmatrix} \Rightarrow O_1 = 2 \cdot \left(3 \cdot a \cdot 3 \cdot b + 3 \cdot a \cdot 3 \cdot c + 3 \cdot b \cdot 3 \cdot c \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1 = 2 \cdot \left(9 \cdot a \cdot b + 9 \cdot a \cdot c + 9 \cdot b \cdot c \right) \Rightarrow O_1 = 2 \cdot 9 \cdot \left(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1 = 9 \cdot \left(2 \cdot \left(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c \right) \right) \Rightarrow \left[O = 2 \cdot \left(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c \right) \right] \Rightarrow O_1 = 9 \cdot O.$$

Vježba 115

Ako se duljine svih bridova kvadra povećaju dva puta, koliko se puta poveća njegovo oplošje?

Rezultat: $O_1 = 4 \cdot O$.