Zadatak 101 (Luka, gimnazija)

Zadana je kvadratna funkcija $f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5)$. Odredite maksimalnu vrijednost funkcije f.

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ima ekstrem čija se vrijednost računa na ove načine:

1. način

$$y=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$$

2. način

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y=f(x),$$

gdje su x_1 i x_2 nultočke (ako postoje).
Ekstrem je minimum ako je $a > 0$, maksimum ako je $a < 0$.
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

Najprije odredimo nultočke kvadratne funkcije.

$$f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \Rightarrow \left[\, f(x)=0 \,\right] \Rightarrow -\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1=0 \\ x-5=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{matrix}\right\}.$$

Najveću vrijednost funkcija poprima za

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x=\frac{-1+5}{2} \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=2.$$

Ta vrijednost iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=-\frac{4}{9}\cdot(2+1)\cdot(2-5) \Rightarrow f(2)=-\frac{4}{9}\cdot 3\cdot(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{4}{9}\cdot 9 \Rightarrow f(2)=\frac{4}{9}\cdot 9 \Rightarrow f(2)=4.$$

2.inačica

Preoblikujemo kvadratnu funkciju.

$$f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{9}\cdot\left(x^2-5\cdot x+x-5\right) \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{9}\cdot\left(x^2-4\cdot x-5\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{4}{9}\cdot x^2+\frac{16}{9}\cdot x+\frac{20}{9} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=-\frac{4}{9}\cdot x^2+\frac{16}{9}\cdot x+\frac{20}{9} \\ a=-\frac{4}{9}\ ,\ b=\frac{16}{9}\ ,\ c=\frac{20}{9} \end{array}\right\}.$$

Najveća vrijednost kvadratne funkcije je:

$$y=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \Rightarrow \left[a=-\frac{4}{9}\ ,\ b=\frac{16}{9}\ ,\ c=\frac{20}{9}\right] \Rightarrow y=\frac{4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{20}{9}-\left(\frac{16}{9}\right)^2}{4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-\frac{320}{81}-\frac{256}{81}}{-\frac{16}{9}} \Rightarrow y=\frac{-\frac{576}{81}}{-\frac{16}{9}} \Rightarrow y=\frac{576\cdot 9}{81\cdot 16} \Rightarrow y=\frac{576\cdot 9}{81\cdot 16} \Rightarrow y=4.$$

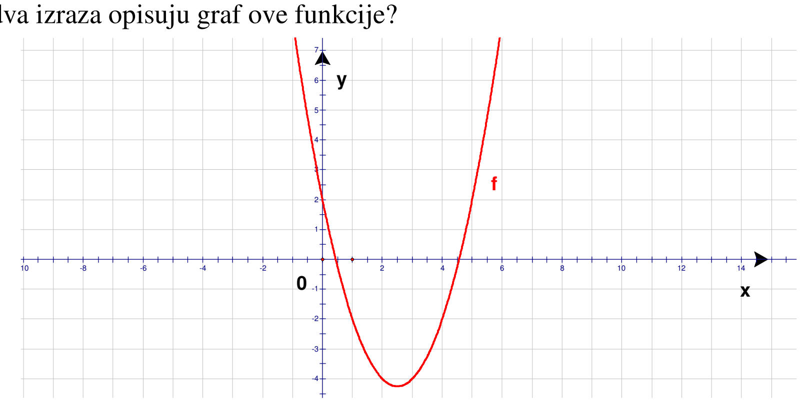
Vježba 101

Zadana je kvadratna funkcija $f(x)=\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(5-x)$. Odredite maksimalnu vrijednost funkcije f.

Rezultat: 4.

Zadatak 102 (4B, TUPŠ)

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



A. $a<0,\ D=0$ *B.* $a>0,\ D>0$ *C.* $a<0,\ D<0$ *D.* $a<0,\ D>0$

Rješenje 102

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \; a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja.
Za a > 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema gore.
Za a < 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema dolje.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Diskriminanta	Jednadžba	Parabola
D > 0	Jednadžba ima dva različita realna rješenja.	Parabola siječe os apscisa (os x).
D = 0	Jednadžba ima dvostruko realno rješenje.	Parabola dira os apscisa (os x).
D < 0	Jednadžba nema realnih rješenja, rješenja su konjugirano kompleksni brojevi.	Parabola ne siječe, niti dira os apscisa (os x).

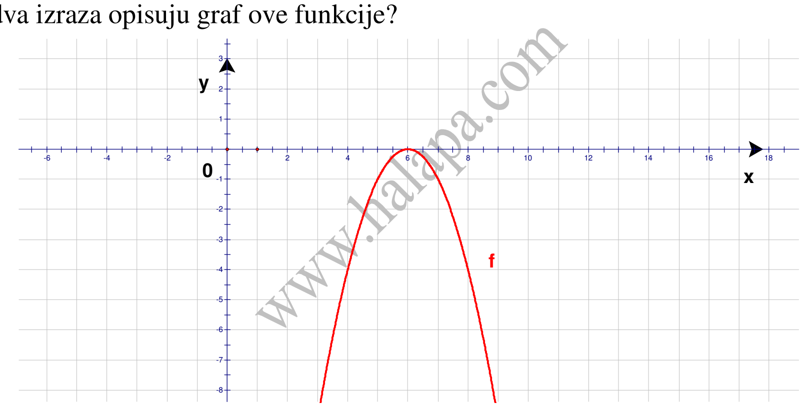
Sa slike vidi se:

- parabola je otvorom okrenuta prema gore pa je a > 0
- parabola siječe os apscisa pa je D > 0.

Odgovor je pod B.

Vježba 102

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



$A.\; a > 0,\; D = 0$ $\qquad B.\; a > 0,\; D > 0$ $\qquad C.\; a < 0,\; D < 0$ $\qquad D.\; a < 0,\; D = 0$

Rezultat: D.

Zadatak 103 (Katarina, maturantica)

Proizvođač je uočio da se zarada od proizvodnje nekoga proizvoda može odrediti uz pomoć formule $Z(x) = -8 \cdot x^2 + 640 \cdot x - 6480$. Z je zarada u kunama, a x broj proizvedenih proizvoda.

a) Kolika je zarada ako je proizvedeno 27 proizvoda?
b) Za koji je drugi broj proizvoda zarada jednaka zaradi za 65 proizvoda?
c) Kolika je maksimalna zarada?

Rješenje 103

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;, \; n \neq 0 \;, \; n \neq 1.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \ a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja. Ona je simetrična s obzirom na pravac koji prolazi njezinim tjemenom, paralelno s y – osi. Jednadžba je tog pravca $x = x_0$. Ako za x_1 i x_2 vrijedi da kvadratna funkcija ima jednaku vrijednosti,

$$f(x_1) = f(x_2)$$

to znači da je apscisa tjemena x_0 polovište intervala $\left[x_1, x_2 \right]$:

$$x_\circ = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ordinatu tjemena dobivamo izračunavanjem vrijednosti funkcije

$$y_\circ = f(x_\circ).$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je $a > 0$.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je $a < 0$.

a)

$$\left. \begin{array}{l} x = 27 \\ Z(x) = -8 \cdot x^2 + 640 \cdot x - 6\,480 \end{array} \right\} \Rightarrow Z(27) = -8 \cdot 27^2 + 640 \cdot 27 - 6\,480 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(27) = 4\,968.$$

b)

Izračunamo zaradu za 65 proizvoda.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 65 \\ Z(x_1) = -8 \cdot x_1^2 + 640 \cdot x_1 - 6\,480 \end{array} \right\} \Rightarrow Z(27) = -8 \cdot 65^2 + 640 \cdot 65 - 6\,480 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(65) = 1320.$$

Tražimo drugi broj x_2 proizvoda za koji je zarada jednaka zaradi od 1320 kn. Napišemo kvadratnu jednadžbu!

$$Z(x) = 1320 \Rightarrow -8 \cdot x^2 + 640 \cdot x - 6\,480 = 1320 \Rightarrow -8 \cdot x^2 + 640 \cdot x - 6\,480 - 1320 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 \cdot x^2 + 640 \cdot x - 7\,800 = 0 \Rightarrow -8 \cdot x^2 + 640 \cdot x - 7\,800 = 0 \ /: (-8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 80 \cdot x + 975 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 80 \cdot x + 975 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -80 \ , \ c = 975 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -80 \ , \ c = 975 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-80) \pm \sqrt{(-80)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 875}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{6\,400 - 3900}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{2\,500}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{80 \pm 50}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{80 + 50}{2} \\ x_2 = \dfrac{80 - 50}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{130}{2} \\ x_2 = \dfrac{30}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{130}{2} \\ x_2 = \frac{30}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 65 \\ x_2 = 15 \end{array}\right\}.$$

Drugi broj proizvoda je 15.

c)

Računamo maksimalnu zaradu.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 65 \\ x_2 = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_o = \frac{x_1 + x_2}{2} \right] \Rightarrow x_o = \frac{65+15}{2} \Rightarrow x_o = \frac{80}{2} \Rightarrow x_o = \frac{80}{2} \Rightarrow x_o = 40.$$

Maksimalna zarada iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x_o = 40 \\ Z(x_o) = -8 \cdot x_o^2 + 640 \cdot x_o - 6\,480 \end{array}\right\} \Rightarrow Z(40) = -8 \cdot 40^2 + 640 \cdot 40 - 6\,480 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(40) = 6\,320.$$

Vježba 103

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 104 (Krešo, srednja škola)

Funkcija $f(x) = -2 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 12$ je rastuća za:

$A.\ 2 < x < 3$ $B.\ x > 2$ $C.\ x > 3$ $D.\ x < 2.5$ $E.\ x < 3$

Rješenje 104

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\ a \neq 0$$

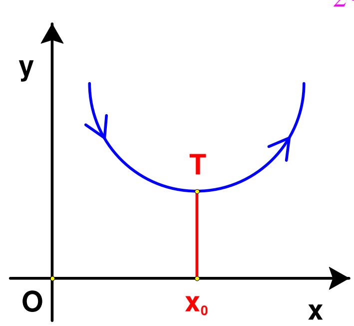
je parabola

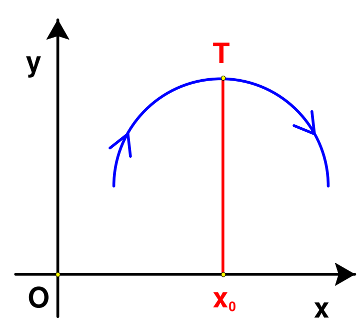
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja.
Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0.
Kvadratna funkcija

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

ima ekstrem u točki s apscisom: $x_o = -\frac{b}{2 \cdot a}$.





$$\begin{array}{ll} \text{funkcija pada} & \text{funkcija raste} \\ x < x_o \;,\; x \in \langle -\infty, x_o \rangle & x < x_o \;,\; x \in \langle -\infty, x_o \rangle \\ \text{funkcija raste} & \text{funkcija pada} \\ x > x_o \;,\; x \in \langle x_o, +\infty \rangle & x > x_o \;,\; x \in \langle x_o, +\infty \rangle \end{array}$$

Računamo apscisu x_0.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -2 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 12 \\ a = -2 \;,\; b = 10 \;,\; c = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_o = -\frac{b}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_o = -\frac{10}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_o = \frac{10}{4} \Rightarrow x_o = 2.5.$$

Parabola je okrenuta prema dolje (a = – 2 < 0) pa funkcija raste za x < 2.5.
Odgovor je pod D.

Vježba 104

Funkcija $f(x) = -2 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 12$ je padajuća za:

$A.\ 2 < x < 3 \qquad B.\ x < 2 \qquad C.\ x > 3 \qquad D.\ x > 2.5 \qquad E.\ x > 3$

Rezultat: D.

Zadatak 105 (Lucija, srednja škola)

Košarkaš je bacio loptu u koš čiji se obruč nalazi na visini 3.05 m iznad podloge. Formula $h(t) = 1.96 + 4.5 \cdot t - 2.95 \cdot t^2$ opisuje visinu h(t) na kojoj se nalazi lopta, pri čemu je t vrijeme proteklo od trenutka bacanja lopte. Visina je izražena u metrima, a vrijeme u sekundama.
a) Na kojoj se visini lopta nalazi 1 sekundu nakon bacanja?
b) Koliko će sekunda proteći od trenutka bacanja lopte do trenutka u kojemu će lopta biti na visini obruča koša? Napišite odgovor kao decimalni broj.

Rješenje 105

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\ a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

a)

Visina na kojoj se lopta nalazi nakon 1 sekunde iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} t = 1 \text{ sekunda} \\ h(t) = 1.96 + 4.5 \cdot t - 2.95 \cdot t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow h(1) = 1.96 + 4.5 \cdot 1 - 2.95 \cdot 1^2 \Rightarrow h(1) = 1.96 + 4.5 - 2.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(1) = 3.51\ m.$$

b)

Računamo vrijeme za koje će se lopta od trenutka bacanja naći na visini obruča koša.

$$h(t) = 3.05 \Rightarrow 1.96 + 4.5 \cdot t - 2.95 \cdot t^2 = 3.05 \Rightarrow 1.96 + 4.5 \cdot t - 2.95 \cdot t^2 - 3.05 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2.95 \cdot t^2 + 4.5 \cdot t - 1.09 = 0 \Rightarrow -2.95 \cdot t^2 + 4.5 \cdot t - 1.09 = 0 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.95 \cdot t^2 - 4.5 \cdot t + 1.09 = 0 \Rightarrow$$

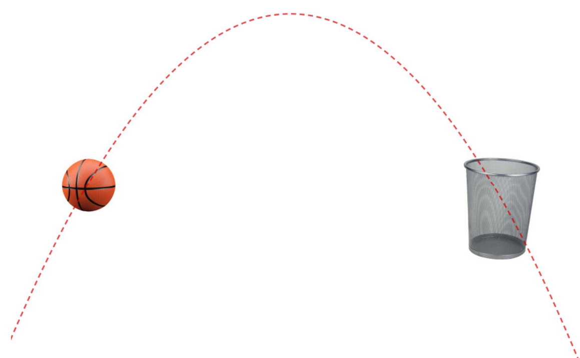
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2.95 \cdot t^{2} - 4.5 \cdot t + 1.09 = 0 \\ a = 2.95 \ , \ b = -4.5 \ , \ c = 1.09 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2.95 \ , \ b = -4.5 \ , \ c = 1.09 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-4.5) \pm \sqrt{(-4.5)^{2} - 4 \cdot 2.95 \cdot 1.09}}{2 \cdot 2.95} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4.5 \pm \sqrt{20.25 - 12.862}}{5.9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{4.5 \pm \sqrt{7.388}}{5.9} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4.5 \pm 2.718087563}{5.9} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_{1} = \dfrac{4.5 - 2.718087563}{5.9} \\ t_{2} = \dfrac{4.5 + 2.718087563}{5.9} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_{1} = \dfrac{1.781912437}{5.9} \\ t_{2} = \dfrac{7.218087563}{5.9} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_{1} = 0.30 \ s \\ t_{2} = 1.22 \ s \end{array}\right\}.$$

Uočimo da je lopta dva puta na visini obruča koša, pri usponu za vrijeme t_1 i pri padu za vrijeme t_2 od trenutka bacanja. Dakle, nakon približno 0.3 s i približno 1.2 s.



Vježba 105

Košarkaš je bacio loptu u koš čiji se obruč nalazi na visini 305 cm iznad podloge. Formula $h(t) = 1.96 + 4.5 \cdot t - 2.95 \cdot t^{2}$ opisuje visinu h(t) na kojoj se nalazi lopta, pri čemu je t vrijeme proteklo od trenutka bacanja lopte. Visina je izražena u metrima, a vrijeme u sekundama.

a) Na kojoj se visini lopta nalazi 1 sekundu nakon bacanja?

b) Koliko će sekunda proteći od trenutka bacanja lopte do trenutka u kojemu će lopta biti na visini obruča koša? Napišite odgovor kao decimalni broj.

Rezultat: 351 cm, 0.3 s, 1.2 s.