Zadatak 101 (Luka, gimnazija)

Zadana je kvadratna funkcija $f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5)$. Odredite maksimalnu vrijednost funkcije f.

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ima ekstrem čija se vrijednost računa na ove načine:

1. način

$$y=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$$

2. način

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y=f(x),$$

gdje su x_1 i x_2 nultočke (ako postoje).
Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

Najprije odredimo nultočke kvadratne funkcije.

$$f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \;\Rightarrow\; [\,f(x)=0\,] \;\Rightarrow\; -\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1=0 \\ x-5=0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{matrix}\right\}.$$

Najveću vrijednost funkcija poprima za

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{-1+5}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{4}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{4}{2} \;\Rightarrow\; x=2.$$

Ta vrijednost iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=-\frac{4}{9}\cdot(2+1)\cdot(2-5) \Rightarrow f(2)=-\frac{4}{9}\cdot 3\cdot(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{4}{9}\cdot 9 \Rightarrow f(2)=\frac{4}{9}\cdot 9 \Rightarrow f(2)=4.$$

2.inačica

Preoblikujemo kvadratnu funkciju.

$$f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{9}\cdot\left(x^2-5\cdot x+x-5\right) \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{9}\cdot\left(x^2-4\cdot x-5\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{4}{9}\cdot x^2+\frac{16}{9}\cdot x+\frac{20}{9} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=-\frac{4}{9}\cdot x^2+\frac{16}{9}\cdot x+\frac{20}{9} \\ a=-\frac{4}{9}\ ,\ b=\frac{16}{9}\ ,\ c=\frac{20}{9} \end{array}\right\}.$$

Najveća vrijednost kvadratne funkcije je:

$$y=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \Rightarrow \left[a=-\frac{4}{9}\ ,\ b=\frac{16}{9}\ ,\ c=\frac{20}{9}\right] \Rightarrow y=\frac{4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{20}{9}-\left(\frac{16}{9}\right)^2}{4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-\frac{320}{81}-\frac{256}{81}}{-\frac{16}{9}} \Rightarrow y=\frac{-\frac{576}{81}}{-\frac{16}{9}} \Rightarrow y=\frac{576\cdot 9}{81\cdot 16} \Rightarrow y=\frac{576\cdot 9}{81\cdot 16} \Rightarrow y=4.$$

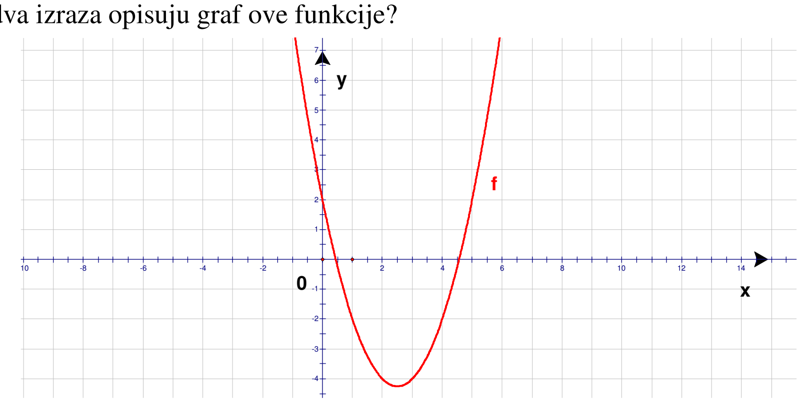
Vježba 101

Zadana je kvadratna funkcija $f(x)=\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(5-x)$. Odredite maksimalnu vrijednost funkcije f.

Rezultat: 4.

Zadatak 102 (4B, TUPŠ)

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



A. $a<0,\ D=0$ B. $a>0,\ D>0$ C. $a<0,\ D<0$ D. $a<0,\ D>0$

Rješenje 102

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \; a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja.
Za a > 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema gore.
Za a < 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema dolje.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Diskriminanta	Jednadžba	Parabola
D > 0	Jednadžba ima dva različita realna rješenja.	Parabola siječe os apscisa (os x).
D = 0	Jednadžba ima dvostruko realno rješenje.	Parabola dira os apscisa (os x).
D < 0	Jednadžba nema realnih rješenja, rješenja su konjugirano kompleksni brojevi.	Parabola ne siječe, niti dira os apscisa (os x).

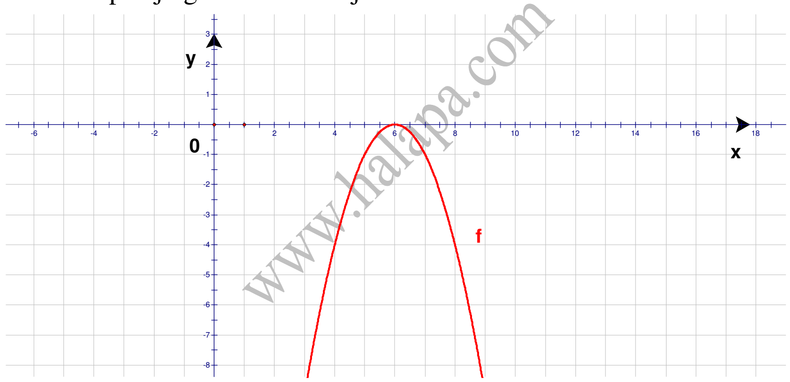
Sa slike vidi se:

- parabola je otvorom okrenuta prema gore pa je a > 0
- parabola siječe os apscisa pa je D > 0.

Odgovor je pod B.

Vježba 102

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



$A.\; a > 0,\; D = 0$ $\quad B.\; a > 0,\; D > 0$ $\quad C.\; a < 0,\; D < 0$ $\quad D.\; a < 0,\; D = 0$

Rezultat: D.

Zadatak 103 (Katarina, maturantica)

Proizvođač je uočio da se zarada od proizvodnje nekoga proizvoda može odrediti uz pomoć formule $Z(x) = -8 \cdot x^2 + 640 \cdot x - 6480$. Z je zarada u kunama, a x broj proizvedenih proizvoda.

a) Kolika je zarada ako je proizvedeno 27 proizvoda?
b) Za koji je drugi broj proizvoda zarada jednaka zaradi za 65 proizvoda?
c) Kolika je maksimalna zarada?

Rješenje 103

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja. Ona je simetrična s obzirom na pravac koji prolazi njezinim tjemenom, paralelno s y – osi. Jednadžba je tog pravca $x = x_0$. Ako za x_1 i x_2 vrijedi da kvadratna funkcija ima jednaku vrijednosti,

$$f(x_1)=f(x_2)$$

to znači da je apscisa tjemena x_0 polovište intervala $\left[\,x_1,\ x_2\,\right]$:

$$x_\circ=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Ordinatu tjemena dobivamo izračunavanjem vrijednosti funkcije

$$y_\circ=f(x_\circ).$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je $a > 0$.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je $a < 0$.

a)

$$\left.\begin{array}{l} x=27 \\ Z(x)=-8\cdot x^2+640\cdot x-6\,480 \end{array}\right\} \Rightarrow Z(27)=-8\cdot 27^2+640\cdot 27-6\,480 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(27)=4\,968.$$

b)

Izračunamo zaradu za 65 proizvoda.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=65 \\ Z(x_1)=-8\cdot x_1^2+640\cdot x_1-6\,480 \end{array}\right\} \Rightarrow Z(27)=-8\cdot 65^2+640\cdot 65-6\,480 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(65)=1320.$$

Tražimo drugi broj x_2 proizvoda za koji je zarada jednaka zaradi od 1320 kn. Napišemo kvadratnu jednadžbu!

$$Z(x)=1320 \Rightarrow -8\cdot x^2+640\cdot x-6\,480=1320 \Rightarrow -8\cdot x^2+640\cdot x-6\,480-1320=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\cdot x^2+640\cdot x-7\,800=0 \Rightarrow -8\cdot x^2+640\cdot x-7\,800=0\ /:(-8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-80\cdot x+975=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-80\cdot x+975=0 \\ a=1\ ,\ b=-80\ ,\ c=975 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-80\ ,\ c=975 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-80)\pm\sqrt{(-80)^2-4\cdot 1\cdot 875}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{80\pm\sqrt{6\,400-3900}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{80\pm\sqrt{2\,500}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{80\pm 50}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{80+50}{2} \\ x_2=\dfrac{80-50}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{130}{2} \\ x_2=\dfrac{30}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{130}{2} \\ x_2 = \frac{30}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 65 \\ x_2 = 15 \end{matrix}\right\}.$$

Drugi broj proizvoda je 15.

c)

Računamo maksimalnu zaradu.

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 65 \\ x_2 = 15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_\circ = \frac{x_1 + x_2}{2} \right] \Rightarrow x_\circ = \frac{65+15}{2} \Rightarrow x_\circ = \frac{80}{2} \Rightarrow x_\circ = \frac{80}{2} \Rightarrow x_\circ = 40.$$

Maksimalna zarada iznosi:

$$\left.\begin{matrix} x_\circ = 40 \\ Z(x_\circ) = -8 \cdot x_\circ^2 + 640 \cdot x_\circ - 6\,480 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Z(40) = -8 \cdot 40^2 + 640 \cdot 40 - 6\,480 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{matrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(40) = 6\,320.$$

Vježba 103

Odmor!

Rezultat: …