Zadatak 101 (Luka, gimnazija)

Zadana je kvadratna funkcija $f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5)$. Odredite maksimalnu vrijednost funkcije f.

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ima ekstrem čija se vrijednost računa na ove načine:

1. način

$$y=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$$

2. način

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y=f(x),$$

gdje su x_1 i x_2 nultočke (ako postoje).
Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

Najprije odredimo nultočke kvadratne funkcije.

$$f(x)=-\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \Rightarrow \left[\, f(x)=0 \,\right] \Rightarrow -\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{array}\right\}.$$

Najveću vrijednost funkcija poprima za

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x=\frac{-1+5}{2} \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=2.$$

Ta vrijednost iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x) = -\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) = -\frac{4}{9}\cdot(2+1)\cdot(2-5) \Rightarrow f(2) = -\frac{4}{9}\cdot 3\cdot(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{4}{9}\cdot 9 \Rightarrow f(2) = \frac{4}{9}\cdot 9 \Rightarrow f(2) = 4.$$

2.inačica

Preoblikujemo kvadratnu funkciju.

$$f(x) = -\frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{9}\cdot\left(x^2 - 5\cdot x + x - 5\right) \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{9}\cdot\left(x^2 - 4\cdot x - 5\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{4}{9}\cdot x^2 + \frac{16}{9}\cdot x + \frac{20}{9} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = -\frac{4}{9}\cdot x^2 + \frac{16}{9}\cdot x + \frac{20}{9} \\ a = -\frac{4}{9}\ ,\ b = \frac{16}{9}\ ,\ c = \frac{20}{9} \end{array}\right\}.$$

Najveća vrijednost kvadratne funkcije je:

$$y = \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a} \Rightarrow \left[a = -\frac{4}{9}\ ,\ b = \frac{16}{9}\ ,\ c = \frac{20}{9}\right] \Rightarrow y = \frac{4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{20}{9} - \left(\frac{16}{9}\right)^2}{4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\frac{320}{81} - \frac{256}{81}}{-\frac{16}{9}} \Rightarrow y = \frac{-\frac{576}{81}}{-\frac{16}{9}} \Rightarrow y = \frac{576\cdot 9}{81\cdot 16} \Rightarrow y = \frac{576\cdot 9}{81\cdot 16} \Rightarrow y = 4.$$

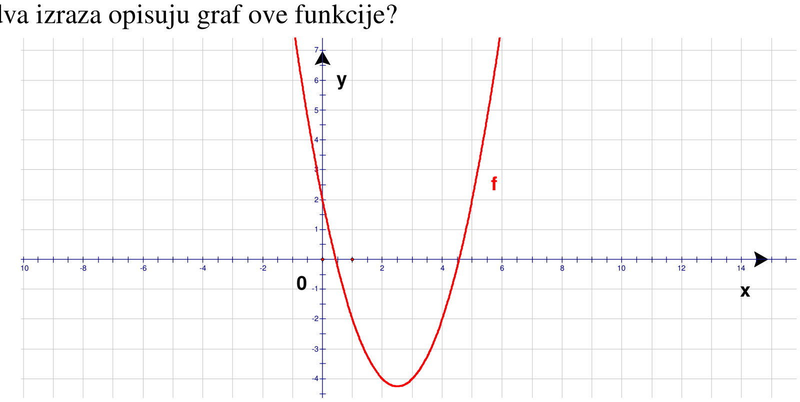
Vježba 101

Zadana je kvadratna funkcija $f(x) = \frac{4}{9}\cdot(x+1)\cdot(5-x)$. Odredite maksimalnu vrijednost funkcije f.

Rezultat: 4.

Zadatak 102 (4B, TUPŠ)

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



A. $a < 0,\ D = 0$ B. $a > 0,\ D > 0$ C. $a < 0,\ D < 0$ D. $a < 0,\ D > 0$

Rješenje 102

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \ a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja.
Za a > 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema gore.
Za a < 0 pripadna parabola je otvorom okrenuta prema dolje.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Diskriminanta	**Jednadžba**	**Parabola**
D > 0	Jednadžba ima dva različita realna rješenja.	Parabola siječe os apscisa (os x).
D = 0	Jednadžba ima dvostruko realno rješenje.	Parabola dira os apscisa (os x).
D < 0	Jednadžba nema realnih rješenja, rješenja su konjugirano kompleksni brojevi.	Parabola ne siječe, niti dira os apscisa (os x).

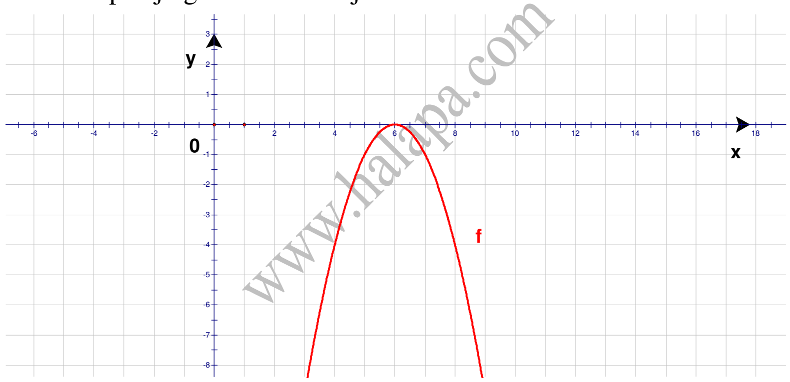
Sa slike vidi se:

- parabola je otvorom okrenuta prema gore pa je a > 0
- parabola siječe os apscisa pa je D > 0.

Odgovor je pod B.

Vježba 102

Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



$A.\ a > 0,\ D = 0 \qquad B.\ a > 0,\ D > 0 \qquad C.\ a < 0,\ D < 0 \qquad D.\ a < 0,\ D = 0$

Rezultat: D.