Zadatak 081 (Nina, gimnazija)

Skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = -x^2 - 2x + c$ jest interval $\langle -\infty, 3]$. Tada je:

$$A.\ c = 2 \qquad B.\ c = -1 \qquad C.\ c = 3 \qquad D.\ c = -4$$

Rješenje 081

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ima ekstrem čija vrijednost iznosi

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je $a > 0$, maksimum ako je $a < 0$.

Ako je $a < 0$ skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ jest interval

$$\left\langle -\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \right].$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 2 \cdot x + c \\ f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -2 \\ c = c \end{array}\right\}.$$

Budući da je skup svih vrijednosti zadane funkcije interval $\langle -\infty, 3]$, $a = -1 < 0$, najveća vrijednost funkcije je 3 pa vrijedi:

$$\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} a = -1 \\ b = -2 \\ c = c \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{4 \cdot (-1) \cdot c - (-2)^2}{4 \cdot (-1)} = 3 \Rightarrow \frac{-4 \cdot c - 4}{-4} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-4 \cdot c - 4}{-4} = 3 \ / \cdot (-4) \Rightarrow -4 \cdot c - 4 = -12 \Rightarrow -4 \cdot c = -12 + 4 \Rightarrow -4 \cdot c = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot c = -8 \ / : (-4) \Rightarrow c = 2.$$

Odgovor je pod A

Vježba 081

Skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = -x^2 - 2x + c$ jest interval $\langle -\infty, 5]$. Tada je:

$$A.\ c = 2 \qquad B.\ c = 4 \qquad C.\ c = 3 \qquad D.\ c = -4$$

Rezultat: B.

Zadatak 082 (Nina, gimnazija)

Skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = x^2 - 2x + c$ jest interval $[3, +\infty\rangle$. Tada je:

$$A.\ c = 2 \qquad B.\ c = 1 \qquad C.\ c = 3 \qquad D.\ c = 4$$

Rješenje 082

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ima ekstrem čija vrijednost iznosi

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je $a > 0$, maksimum ako je $a < 0$.

Ako je a > 0 skup svih vrijednosti funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ jest interval

$$\left[\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a},\ +\infty\right\rangle.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-2\cdot x+c \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=c \end{array}\right\}.$$

Budući da je skup svih vrijednosti zadane funkcije interval $\left[3,+\infty\right\rangle$, a = 1 > 0, najmanja vrijednost funkcije je 3 pa vrijedi:

$$\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=3 \Rightarrow \begin{bmatrix} a=1 \\ b=-2 \\ c=c \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{4\cdot 1\cdot c-(-2)^2}{4\cdot 1}=3 \Rightarrow \frac{4\cdot c-4}{4}=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot c-4}{4}=3\ /\cdot 4 \Rightarrow 4\cdot c-4=12 \Rightarrow 4\cdot c=12+4 \Rightarrow 4\cdot c=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot c=16\ /:4 \Rightarrow c=4.$$

Odgovor je pod D

Vježba 082

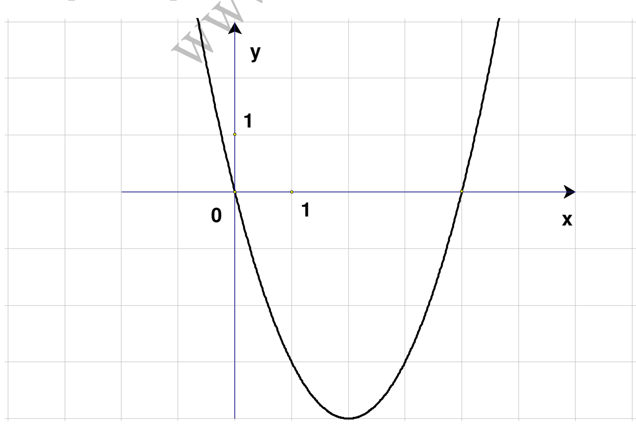
Skup svih vrijednosti funkcije f(x) = x^2 – 2 x + c jest interval $\left[5,+\infty\right\rangle$. Tada je:

A. $c=4$ *B.* $c=5$ *C.* $c=6$ *D.* $c=7$

Rezultat: C.

Zadatak 083 (Marin, gimnazija)

Odredite jednadžbu parabole prikazane na slici.



Rješenje 083

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi f(x_0) = 0. Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (dakle y = 0). Nultočke kvadratne funkcije f(x) = a · x^2 + b · x + c rješenja su pripadne kvadratne jednadžbe a · x^2 + b · x + c = 0 jer je za njih f(x) = 0. Njezine realne nultočke sjecišta su njezinoga grafa s osi x.

Faktorizacija kvadratnog trinoma
Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

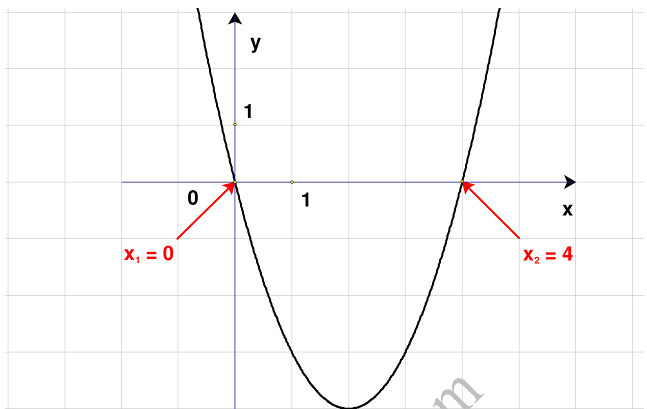
$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

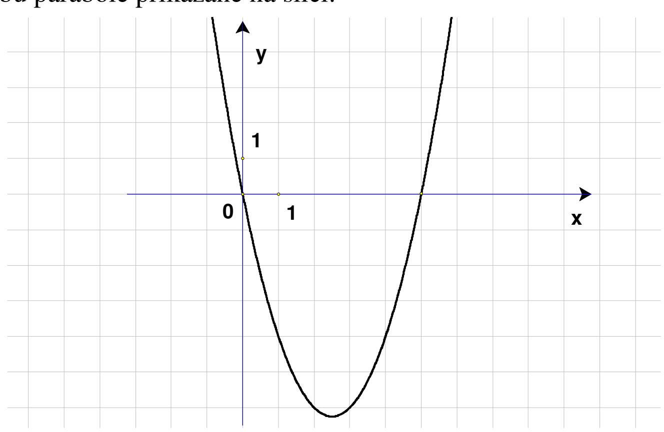


Sa slike vidi se da su nultočke $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$ pa jednadžba parabole glasi:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ x_1 = 0 \;,\; x_2 = 4 \\ y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow y = 1 \cdot (x - 0) \cdot (x - 4) \Rightarrow y = x \cdot (x - 4) \Rightarrow y = x^2 - 4 \cdot x.$$

Vježba 083

Odredite jednadžbu parabole prikazane na slici.



Rezultat: $y = x^2 - 5 \cdot x.$

Zadatak 084 (Zabrinuta, hotelijerska škola)

Za neku kvadratnu funkciju $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ vrijedi da je njezina najveća vrijednost 0.
Što od navedenoga vrijedi za tu funkciju?

$A.\ a = -3 \;,\; D > 0 \qquad B.\ a = -2 \;,\; D = 0 \qquad C.\ a = 2 \;,\; D < 0 \qquad D.\ a = 3 \;,\; D = 0$

Rješenje 084

Ponovimo!

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \ a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je $a > 0$.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je $a < 0$.
Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

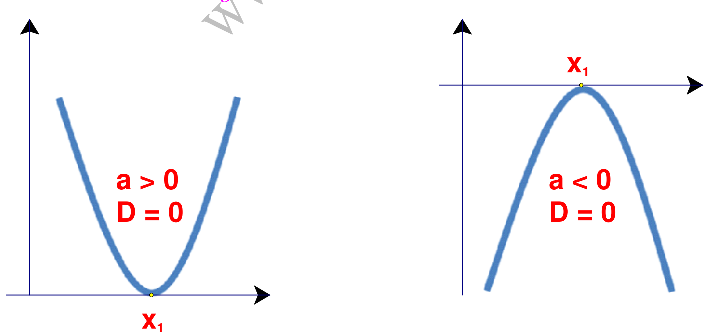
$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \Rightarrow y_0 = -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a} \Rightarrow y_0 = -\frac{D}{4 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je $a > 0$, maksimum ako je $a < 0$.

$$\frac{a}{b} = 0, \ b \neq 0 \Rightarrow a = 0.$$



Maksimalna vrijednost kvadratne funkcije jednaka je nuli pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = -\frac{D}{4 \cdot a} \\ y_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{D}{4 \cdot a} = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Budući da kvadratna funkcija ima maksimalnu vrijednost, kvadratni koeficijent a mora biti negativan, $a < 0$. Tražimo odgovor gdje je $a < 0$ i $D = 0$.
Odgovor je pod B.

Vježba 084

Za neku kvadratnu funkciju $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ vrijedi da je njezina najveća vrijednost 0. Što od navedenoga vrijedi za tu funkciju?

$A.\ a=5\ ,\ D>0$ $B.\ a=-7\ ,\ D=0$ $C.\ a=2\ ,\ D<0$ $D.\ a=3\ ,\ D=0$

Rezultat: B.

Zadatak 085 (Katarina, gimnazija)

Rastavite polinom $f(x)=3\cdot x^2+2\cdot x-1$ na faktore.

Rješenje 085

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad b\cdot\frac{a}{b}=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Faktorizacija kvadratnog trinoma

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0.$$

1.inačica

Kvadratni trinom rastavimo na faktore metodom grupiranja.

$$3\cdot x^2+2\cdot x-1=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=2\cdot x^2+x^2+2\cdot x-1=2\cdot x^2+2\cdot x+x^2-1=$$

$$=\left(2\cdot x^2+2\cdot x\right)+\left(x^2-1\right)=2\cdot x\cdot(x+1)+(x-1)\cdot(x+1)=2\cdot x\cdot(x+1)+(x-1)\cdot(x+1)=$$

$$=(x+1)\cdot(2\cdot x+x-1)=(x+1)\cdot(3\cdot x-1).$$

Dakle,

$$f(x)=3\cdot x^2+2\cdot x-1\ \Rightarrow\ f(x)=(x+1)\cdot(3\cdot x-1).$$

2.inačica

Kvadratni trinom

$$f(x)=3\cdot x^2+2\cdot x-1$$

rastavit ćemo na faktore tako da najprije riješimo kvadratnu jednadžbu.

$$3\cdot x^2+2\cdot x-1=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}3\cdot x^2+2\cdot x-1=0\\ a=3\ ,\ b=2\ ,\ c=-1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}a=3\ ,\ b=2\ ,\ c=-1\\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{6}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm4}{6} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{-2-4}{6} \\ x_2=\frac{-2+4}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-\frac{6}{6} \\ x_2=\frac{2}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-\frac{6}{6} \\ x_2=\frac{2}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}.$$

Sada je

$$f(x)=3\cdot x^2+2\cdot x-1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a=3\ ,\ x_1=-1\ ,\ x_2=\frac{1}{3} \\ f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=3\cdot(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=3\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(x)=(x+1)\cdot(3\cdot x-1).$$

Vježba 085

Rastavite polinom $f(x)=2\cdot x^2+x-1$ na faktore.

Rezultat: $(x+1)\cdot(2\cdot x-1).$

Zadatak 086 (Marko, tehnička škola)

Odredi polinom drugog stupnja $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ako je f(0) = 0, f(1) = 2 te $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ za svaki realni broj x.

Rješenje 086

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Iz uvjeta f(0) = 0 izračunamo koeficijent c.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ f(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\cdot0^2+b\cdot0+c=0 \Rightarrow c=0.$$

Traženi polinom drugog stupnja ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x.$$

Iz uvjeta f(1) = 2 dobije se

$$\left.\begin{matrix} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x \\ f(1)=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\cdot1^2+b\cdot1=2 \Rightarrow a\cdot1+b=2 \Rightarrow a+b=2.$$

Budući da je $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ za svaki realni broj x, možemo uzeti, na primjer, da je x = 1 pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f\left(\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}-x\right) \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+b\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)=a\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+b\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{1}\right)^2+b\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{1}\right)=a\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{1}\right)^2+b\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\left(\frac{3+2}{2}\right)^2+b\cdot\left(\frac{3+2}{2}\right)=a\cdot\left(\frac{3-2}{2}\right)^2+b\cdot\left(\frac{3-2}{2}\right) \Rightarrow a\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot b=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}\cdot a+\frac{5}{2}\cdot b=\frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b \Rightarrow \frac{25}{4}\cdot a+\frac{5}{2}\cdot b=\frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b \;/\cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\cdot a+10\cdot b=a+2\cdot b \Rightarrow 25\cdot a+10\cdot b-a-2\cdot b=0 \Rightarrow 24\cdot a+8\cdot b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24\cdot a+8\cdot b=0 \;/:8 \Rightarrow 3\cdot a+b=0.$$

Sada imamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ 3\cdot a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=2 \;/\cdot(-1) \\ 3\cdot a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a-b=-2 \\ 3\cdot a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a=-2 \Rightarrow 2\cdot a=-2 \;/:2 \Rightarrow a=-1.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1+b=2 \Rightarrow b=2+1 \Rightarrow b=3.$$

Polinom drugog stupnja glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=-1\;,\; b=3\;,\; c=0 \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-1\cdot x^2+3\cdot x+0 \Rightarrow f(x)=-x^2+3\cdot x.$$

Vježba 086

Odredi polinom drugog stupnja $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ako je f(0) = 0, f(1) = 2 te $f\left(\frac{3}{2}+x\right)-f\left(\frac{3}{2}-x\right)=0$ za svaki realni broj x.

Rezultat: $f(x)=-x^2+3\cdot x.$

Zadatak 087 (Katarina, maturantica)

Odredite najmanju vrijednost funkcije $f(x)=a\cdot x^2-3\cdot x+\frac{1}{2}$, ako se ta vrijednost postiže za x = 3.

Rješenje 087

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$\boxed{y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.}$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Najprije odredimo vodeći koeficijent a.

$$f(x)=a\cdot x^2-3\cdot x+\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2-3\cdot x+\frac{1}{2} \\ a=a\ ,\ b=-3\ ,\ c=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} a=a \\ b=-3 \\ x_0=3 \\ x_0=-\frac{b}{2\cdot a}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ -\frac{-3}{2\cdot a}=3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{2\cdot a}=3\ \Rightarrow\ \frac{3}{2\cdot a}=3\ /\cdot 2\cdot a\ \Rightarrow\ 3=6\cdot a\ \Rightarrow\ 6\cdot a=3\ \Rightarrow\ 6\cdot a=3\ /:6\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{2}.$$

Zadana funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ f(x)=a\cdot x^2-3\cdot x+\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-3\cdot x+\frac{1}{2}.$$

Računamo najmanju vrijednost funkcije.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-3\cdot x+\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ f(3)=\frac{1}{2}\cdot 3^2-3\cdot 3+\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ f(3)=\frac{9}{2}-9+\frac{1}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(3)=\frac{9-18+1}{2}\ \Rightarrow\ f(3)=\frac{-8}{2}\ \Rightarrow\ f(3)=\frac{-8}{2}\ \Rightarrow\ f(3)=-4.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-3\ ,\ c=\frac{1}{2} \\ y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow\ y_0=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-(-3)^2}{4\cdot\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ y_0=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-9}{4\cdot\frac{1}{2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y_0=\frac{1-9}{2}\ \Rightarrow\ y_0=\frac{-8}{2}\ \Rightarrow\ y_0=\frac{-8}{2}\ \Rightarrow\ y_0=-4.$$

Vježba 087

Odredite najmanju vrijednost funkcije $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-b\cdot x+\frac{1}{2},$ ako se ta vrijednost postiže za x = 3.

Rezultat: $y_0=-4.$

Zadatak 088 (Ivan, gimnazija)

Ako polinom $f(x)=a\cdot x^2-2\cdot x-2$ ima dvostruki korijen nađi $f(-1)+f(1).$

Rješenje 088

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

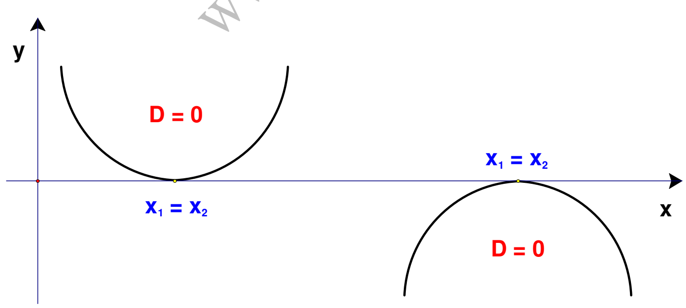
Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Parabola (graf kvadratne funkcije f) dira os x ako je diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe jednaka nuli. Tada jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje. Dalje slijedi:

$$\left.\begin{matrix} a\cdot x^2-2\cdot x-2=0 \\ a=a\ ,\ b=-2\ ,\ c=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=a\ ,\ b=-2\ ,\ c=-2 \\ b^2-4\cdot a\cdot c=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(-2)^2-4\cdot a\cdot(-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+8\cdot a=0\Rightarrow 8\cdot a=-4\Rightarrow 8\cdot a=-4\ /:8\Rightarrow a=-\frac{4}{8}\Rightarrow a=-\frac{4}{8}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

Polinom f ima oblik:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2-2\cdot x-2 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2-2\cdot x-2.$$

Sada je:

$$f(-1)+f(1)=\left[f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2-2\cdot x-2\right]=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)-2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1^2-2\cdot 1-2=$$

$$=-\frac{1}{2}+2-2-\frac{1}{2}-2-2=-\frac{1}{2}+2-2-\frac{1}{2}-2-2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2-2=-1-2-2=-5.$$

Vježba 088

Ako polinom $f(x)=a\cdot x^2-2\cdot x-2$ ima dvostruki korijen nađi $f(-2)+f(2)$.

Rezultat: – 8.

Zadatak 089 (Matija, gimnazija)

Funkcija $f(x)=a\cdot x^2-7\cdot x+4\cdot a$ je negativna za svaki x ako vrijedi:

$$A.\ a<-\frac{7}{4} \qquad B.\ a<0 \qquad C.\ a<-\frac{5}{4} \qquad D.\ a>0$$

Rješenje 089

Ponovimo!

Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i sve elemente koji se nalaze u skupu B. Označavamo ga: $A \cup B$.

Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i skupu A i u skupu B. Označavamo ga: $A \cap B$.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x|>a\ ,\ a>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x<-a \\ x>a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\in\langle-\infty, -a\rangle \\ x\in\langle a, +\infty\rangle \end{array}\right\} \quad , \quad a<b\ ,\ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

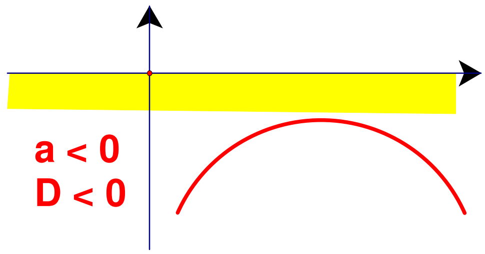
$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Kada kvadratna funkcija nema realnih nultočaka parabola ne siječe os apscisa, tj. D < 0.
Ako je a < 0 parabola je okrenuta prema dolje. Skup za koji je kvadratna funkcija f(x) < 0 iscrtan je ispod osi apscisa.



Najprije odredimo diskriminantu kvadratne jednadžbe.

$$a \cdot x^2 - 7 \cdot x + 4 \cdot a = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot x^2 - 7 \cdot x + 4 \cdot a = 0 \\ a = a \;,\; b = -7 \;,\; c = 4 \cdot a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = a \;,\; b = -7 \;,\; c = 4 \cdot a \\ D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (-7)^2 - 4 \cdot a \cdot 4 \cdot a \Rightarrow D = 49 - 16 \cdot a^2.$$

Budući da je funkcija f(x) negativna za svaki x, mora vrijediti:

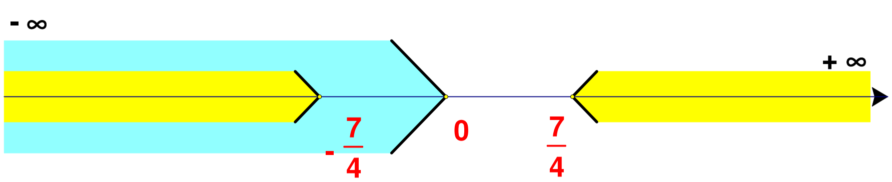
$$\left.\begin{matrix} a < 0 \\ D < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ 49 - 16 \cdot a^2 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ -16 \cdot a^2 < -49 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ -16 \cdot a^2 < -49 \;/: (-16) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ a^2 > \frac{49}{16} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ a^2 > \frac{49}{16} \;/\sqrt{} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ |a| > \sqrt{\frac{49}{16}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ |a| > \frac{7}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a < 0 \\ a < -\frac{7}{4} \;,\; a > \frac{7}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \in \langle -\infty, 0 \rangle \\ a \in \left\langle -\infty, -\frac{7}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}, +\infty \right\rangle \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{gledamo presjek (zajednički dio)} \\ \text{dva skupa rješenja} \end{bmatrix} \Rightarrow a \in \langle -\infty, 0 \rangle \cap \left(\left\langle -\infty, -\frac{7}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}, +\infty \right\rangle \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left\langle -\infty, -\frac{7}{4} \right\rangle \Rightarrow a < -\frac{7}{4}.$$



Odgovor je pod A.

Vježba 089

Funkcija $f(x)=4\cdot a\cdot x^2-7\cdot x+a$ je negativna za svaki x ako vrijedi:

$$A.\ a<-\frac{7}{4} \qquad B.\ a<0 \qquad C.\ a<-\frac{5}{4} \qquad D.\ a>0$$

Rezultat: A.

Zadatak 090 (Matija, gimnazija)

Polinom $P(x)=x^2+2\cdot r\cdot x+1$ poprima pozitivne vrijednosti za sve realne vrijednosti x, ako parametar r pripada intervalu:

$$A.\ \langle -1, 1\rangle \qquad B.\ \langle 2, 4\rangle \qquad C.\ \langle -3, -1\rangle \qquad D.\ \langle -\infty, -1\rangle$$

Rješenje 090

Ponovimo!

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

$$|x|<a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ -a<x<a\ \Rightarrow\ x\in\langle -a, a\rangle, \qquad a<b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad x^2\geq 0 \text{ za svaki } x\in R \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad a^1=a.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a>b\ ,\ c<0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su $a\neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

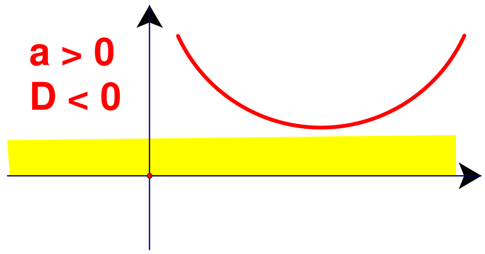
je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je $D>0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D=0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.

- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Kada kvadratna funkcija nema realnih nultočaka parabola ne siječe os apscisa, tj. D < 0.
Ako je a > 0 parabola je okrenuta prema gore. Skup za koji je kvadratna funkcija f(x) > 0 iscrtan je iznad osi apscisa.



1.inačica

Najprije odredimo diskriminantu kvadratne jednadžbe.

$$x^2+2\cdot r\cdot x+1=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+2\cdot r\cdot x+1=0 \\ a=1\ ,\ b=2\cdot r\ ,\ c=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=2\cdot r\ ,\ c=1 \\ D=b^2-4\cdot a\cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=(2\cdot r)^2-4\cdot 1\cdot 1 \Rightarrow D=4\cdot r^2-4.$$

Budući da je funkcija f(x) pozitivna za svaki x, mora vrijediti:

$$\left.\begin{matrix} a=1>0 \\ D<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\cdot r^2-4<0 \Rightarrow 4\cdot r^2<4 \Rightarrow 4\cdot r^2<4\ /:4 \Rightarrow r^2<1 \Rightarrow r^2<1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r|<1 \Rightarrow -1<r<1 \Rightarrow r\in\langle -1, 1\rangle.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Preoblikujemo zadani polinom.

$$P(x)=x^2+2\cdot r\cdot x+1 \Rightarrow P(x)=x^2+2\cdot r\cdot x+r^2-r^2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\left(x^2+2\cdot r\cdot x+r^2\right)-r^2+1 \Rightarrow P(x)=(x+r)^2-r^2+1.$$

Budući da je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan broj, a mora biti P(x) > 0 za svaki x, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} P(x)=(x+r)^2-r^2+1 \\ P(x)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x+r)^2-r^2+1>0 \Rightarrow \left[(x+r)^2\geq 0\right] \Rightarrow -r^2+1>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -r^2>-1 \Rightarrow -r^2>-1\ /\cdot(-1) \Rightarrow r^2<1 \Rightarrow r^2<1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r|<1 \Rightarrow -1<r<1 \Rightarrow r\in\langle -1, 1\rangle.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 090

Polinom $P(x)=2\cdot x^2+4\cdot r\cdot x+2$ poprima pozitivne vrijednosti za sve realne vrijednosti x, ako parametar r pripada intervalu:

$A.\ \langle -1, 1\rangle$ $\quad B.\ \langle 2, 4\rangle$ $\quad C.\ \langle -3, -1\rangle$ $\quad D.\ \langle -\infty, -1\rangle$

Rezultat: A.

Zadatak 091 (Lucija, srednja škola)

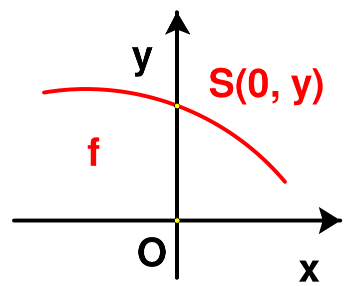
Zadana je funkcija $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2.$

a) Odredite koordinate sjecišta grafa funkcije f s osi y.
b) Kolika je maksimalna vrijednost funkcije f?

Rješenje 091

Ponovimo!

Ako graf funkcije f siječe os y tada je apscisa sjecišta jednaka 0, tj. x = 0.



Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ima ekstrem čija vrijednost iznosi

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

a) Kada graf funkcije f siječe os y tada je apscisa sjecišta jednaka 0, tj. x = 0.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 \Rightarrow f(0) = -2.$$

Koordinate sjecišta glase:

$$S(x, y) = S(0, -2).$$

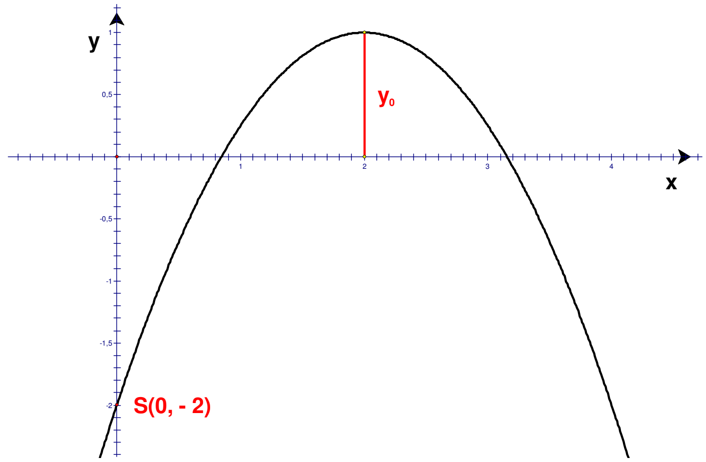
b) Budući da je zadana kvadratna funkcija kojoj je vodeći koeficijent negativan broj

$$a = -\frac{3}{4} < 0,$$

njezina maksimalna vrijednost iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2 \\ a = -\frac{3}{4} \ , \ b = 3 \ , \ c = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \right] \Rightarrow y_0 = \frac{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-2) - 3^2}{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-2) - 3^2}{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow y_0 = \frac{6-9}{-3} \Rightarrow y_0 = \frac{-3}{-3} \Rightarrow y_0 = \frac{-3}{-3} \Rightarrow y_0 = 1.$$



Vježba 091

Zadana je funkcija $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 5.$ Odredite koordinate sjecišta grafa funkcije f s osi y.

Rezultat: $S(x,\ y) = S(0,\ -5).$

Zadatak 092 (4A, TUPŠ)

Ekološka udruga je 2010. godine provela istraživanje o kakvoći zraka. Broj molekula ugljikova monoksida na milijun molekula zraka (M) procjenjuje se prema formuli

$M = 0.01 \cdot t^2 - 0.24 \cdot t + 4.31,$ gdje je t broj godina proteklih od 2010. godine.

a) Koliki je procijenjeni broj molekula ugljikova monoksida na milijun molekula zraka za 2026. godinu?

b) Koje će godine prema toj procjeni biti **najmanji** broj molekula ugljikova monoksida na milijun molekula zraka?

Rješenje 092

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Vrste ekstrema:

- minimum ako je $a > 0$
- maksimum ako je $a < 0$.

a) Računamo koliki je procijenjeni broj molekula ugljikova monoksida na milijun molekula zraka za

2026. godinu.
Od 2010. godine do 2026. godine proći će 16 godina pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t=16 \\ M=0.01\cdot t^2-0.24\cdot t+4.31 \end{array}\right\} \Rightarrow M=0.01\cdot 16^2-0.24\cdot 16+4.31 \Rightarrow M=3.03\approx 3.$$

b) Računamo koje će godine prema toj procjeni biti **najmanji** broj molekula ugljikova monoksida na milijun molekula zraka. Budući da je

$$M=0.01\cdot t^2-0.24\cdot t+4.31,$$

kvadratna funkcija (varijabla je t), a vodeći je koeficijent pozitivan

$$a=0.01 \Rightarrow a>0,$$

funkcija ima minimum za

$$\left.\begin{array}{l} M=0.01\cdot t^2-0.24\cdot t+4.31 \\ a=0.01\ ,\ b=-0.24\ ,\ c=4.31 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[t_0=-\frac{b}{2\cdot a}\right] \Rightarrow t_0=-\frac{-0.24}{2\cdot 0.01} \Rightarrow t_0=12.$$

Prema toj procjeni to će biti za 12 godina ili 2022. godine.

$$2010+12=2022.$$

Vježba 092

Ekološka udruga je 2012. godine provela istraživanje o kakvoći zraka. Broj molekula ugljikova monoksida na milijun molekula zraka (M) procjenjuje se prema formuli $M=0.01\cdot t^2-0.24\cdot t+4.31$, gdje je t broj godina proteklih od 2010. godine. Koliki je procijenjeni broj molekula ugljikova monoksida na milijun molekula zraka za 2028. godinu?

Rezultat: 3.

Zadatak 093 (Leo i Marko, tehnička škola)

Ispitaj svojstva i skiciraj graf funkcije $f(x)=-x^2+6\cdot x-8.$

Rješenje 093

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Ispitivanje tijeka kvadratne funkcije

1. Utvrdimo predznak vodećeg koeficijenta a. Prema njemu odredi se okrenutost parabole:

- $a > 0 \Rightarrow$ parabola je okrenuta prema gore
- $a < 0 \Rightarrow$ parabola je okrenuta prema dolje.

2. Odrede se nultočke funkcije rješavanjem pripadne kvadratne jednadžbe:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.$$

Pritom vrijedi:

- $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \Rightarrow$ funkcija ima dvije nultočke
- $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Rightarrow$ funkcija ima jednu nultočku
- $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \Rightarrow$ funkcija nema nultočaka.

3. Odredi se tjeme parabole $T(x_0, y_0)$.

1. način

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} \quad , \quad y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}$$

2. način

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y_0 = f(x_0),$$

gdje su x_1 i x_2 nultočke (ako postoje).

4. Odredi se os simetrije parabole. To je pravac

$$x = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

5. Odredi se sjecište parabole s osi y. Uvrsti se u funkciju $x = 0$ i izračuna $y = f(0)$. To je točka

$$(0, f(0)).$$

6. Napravimo tablicu pada i rasta funkcije:

- $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	y_0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	y_0	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

7. Skiciramo parabolu, graf kvadratne funkcije.

Ajmo, dečki, malo računati! ☺

1. Utvrdimo predznak vodećeg koeficijenta a.

$$f(x) = -x^2 + 6 \cdot x - 8 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -1 < 0.$$

Parabola je okrenuta prema dolje.

2. Odredimo nultočke funkcije rješavanjem pripadne kvadratne jednadžbe:

$$-x^2 + 6 \cdot x - 8 = 0 \Rightarrow -x^2 + 6 \cdot x - 8 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0 \\ a = 1 \; , \; b = -6 \; , \; c = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \; , \; b = -6 \; , \; c = 8 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm2}{2}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{6+2}{2}\\ x_2=\frac{6-2}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{8}{2}\\ x_2=\frac{4}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{8}{2}\\ x_2=\frac{4}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=4\\ x_2=2\end{matrix}\right\}.$$

3. Odredi se tjeme parabole $T(x_0, y_0)$.

1. način

$$f(x)=-x^2+6\cdot x-8\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=-1\\ b=6\\ c=-8\end{matrix}\right\}.$$

Računamo x_0.

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}\Rightarrow x_0=-\frac{6}{2\cdot(-1)}\Rightarrow x_0=\frac{6}{2}\Rightarrow x_0=\frac{6}{2}\Rightarrow x_0=3.$$

Računamo y_0.

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\Rightarrow y_0=\frac{4\cdot(-1)\cdot(-8)-6^2}{4\cdot(-1)}\Rightarrow y_0=\frac{32-36}{-4}\Rightarrow y_0=\frac{-4}{-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0=\frac{-4}{-4}\Rightarrow y_0=1.$$

Tjeme parabole je

$$T(3, 1).$$

4. Odredi se os simetrije parabole.

$$f(x)=-x^2+6\cdot x-8\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=-1\\ b=6\\ c=-8\end{matrix}\right\}.$$

To je pravac

$$x=-\frac{b}{2\cdot a}\Rightarrow x=-\frac{6}{2\cdot(-1)}\Rightarrow x=\frac{6}{2}\Rightarrow x=\frac{6}{2}\Rightarrow x=3.$$

5. Odredi se sjecište parabole s osi y. Uvrsti se u funkciju x = 0 i izračuna y = f(0).

$$\left.\begin{matrix} x=0\\ f(x)=-x^2+6\cdot x-8\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(0)=-0^2+6\cdot0-8\Rightarrow f(0)=-8.$$

To je točka

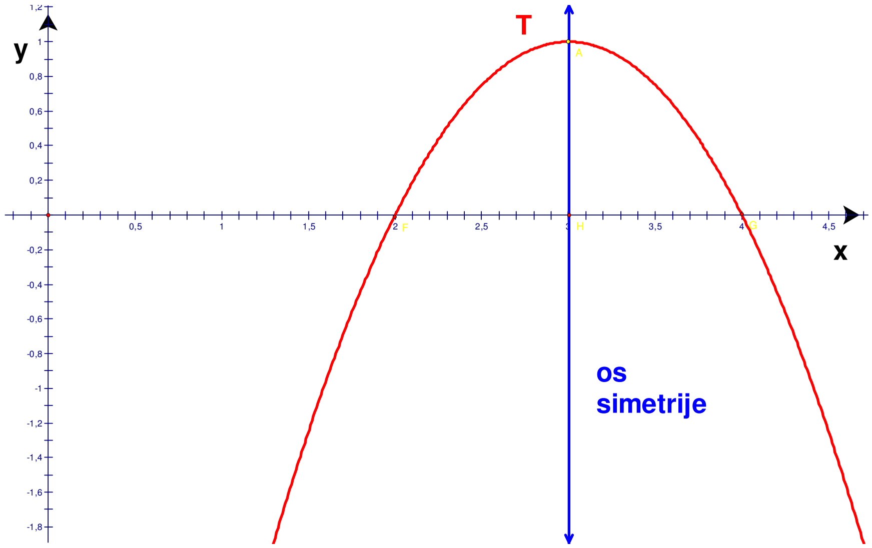
$$(0, -8).$$

6. Napravimo tablicu pada i rasta funkcije:

- a = – 1 < 0

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

7. Skiciramo parabolu, graf kvadratne funkcije.



Vježba 093

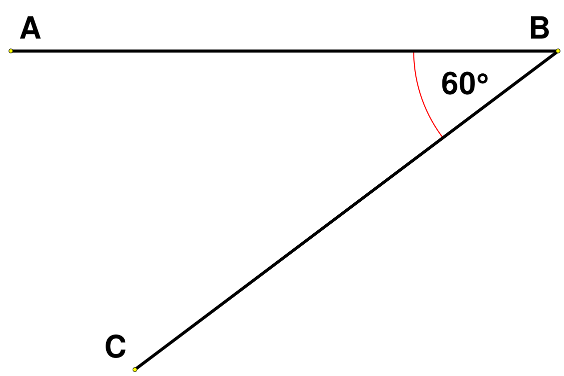
Ispitaj svojstva i skiciraj graf funkcije $f(x) = -x^2 + x + 2.$

Rezultat:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Zadatak 094 (Felix, maturant)

Mjesta A i B udaljena su 53 km i povezana ravnom željezničkom prugom, a mjesta B i C povezana su ravnom autocestom. Kut između ceste i pruge jest 60° kao što je prikazano na skici. U isto je vrijeme vlak krenuo iz mjesta A prema mjestu B, a automobil iz mjesta B prema mjestu C. Oba vozila kreću se konstantnim brzinama pri čemu je automobil dvostruko brži od vlaka. Koliko će kilometara prijeći vlak od trenutka polaska iz mjesta A do trenutka u kojemu će zračna udaljenost između automobila i vlaka biti najkraća?



Rješenje 094

Ponovimo!

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad a^1 = a.$$
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

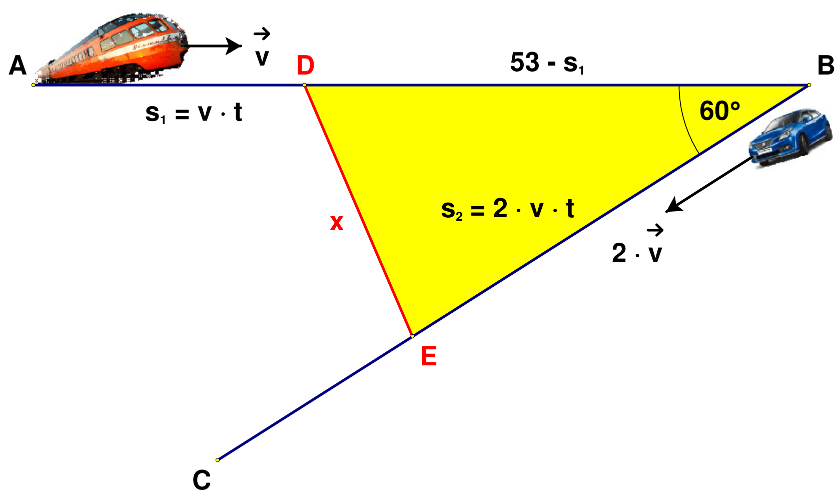
$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Vrste ekstrema:

- minimum ako je a > 0
- maksimum ako je a < 0.



Sa slike vidi se:

$$|DE| = x \ , \ |AB| = 53 \ km \ , \ |AD| = s_1 = v \cdot t \ , \ |DB| = 53 - s_1 = 53 - v \cdot t \ , \ |BE| = s_2 = 2 \cdot v \cdot t$$

$$\angle DBE = 60^\circ .$$

Neka je t vrijeme za koje je vlak prevalio put

$$s_1 = v \cdot t$$

i došao u točku D, a automobil prešao put

$$s_2 = 2 \cdot v \cdot t$$

i nalazi se u točki E.
Da bismo izračunali udaljenost između automobila i vlaka uočimo trokut DEB i uporabimo kosinusov poučak. Vrijedi:

$$|DE|^2 = |DB|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |DB| \cdot |BE| \cdot \cos\angle DBE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = (53 - v \cdot t)^2 + (2 \cdot v \cdot t)^2 - 2 \cdot (53 - v \cdot t) \cdot 2 \cdot v \cdot t \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2809 - 106 \cdot v \cdot t + v^2 \cdot t^2 + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 - 2 \cdot (53 - v \cdot t) \cdot 2 \cdot v \cdot t \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2809 - 106 \cdot v \cdot t + v^2 \cdot t^2 + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 - 2 \cdot (53 - v \cdot t) \cdot 2 \cdot v \cdot t \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2809 - 106 \cdot v \cdot t + v^2 \cdot t^2 + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 - 2 \cdot (53 - v \cdot t) \cdot v \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2809 - 106 \cdot v \cdot t + v^2 \cdot t^2 + 4 \cdot v^2 \cdot t^2 - 106 \cdot v \cdot t + 2 \cdot v^2 \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 7 \cdot v^2 \cdot t^2 - 212 \cdot v \cdot t + 2809 \Rightarrow x^2 = 7 \cdot v^2 \cdot t^2 - 212 \cdot v \cdot t + 2809 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{7 \cdot v^2 \cdot t^2 - 212 \cdot v \cdot t + 2809}.$$

Uočimo da je pod korijenom kvadratna funkcija po varijabli t (vremenu)

$$f(t) = 7 \cdot v^2 \cdot t^2 - 212 \cdot v \cdot t + 2809$$

čiji je vodeći koeficijent

$$a = 7 \cdot v^2$$

pozitivan pa funkcija ima minimalnu vrijednost za

$$t = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Budući da udaljenost x mora biti najkraća, trebamo odrediti t za koji kvadratna funkcija f(t) ima najmanju vrijednost.

$$f(t) = 7 \cdot v^2 \cdot t^2 - 212 \cdot v \cdot t + 2809 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(t) = 7 \cdot v^2 \cdot t^2 - 212 \cdot v \cdot t + 2809 \\ a = 7 \cdot v^2 \;,\; b = -212 \cdot v \;,\; c = 2809 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

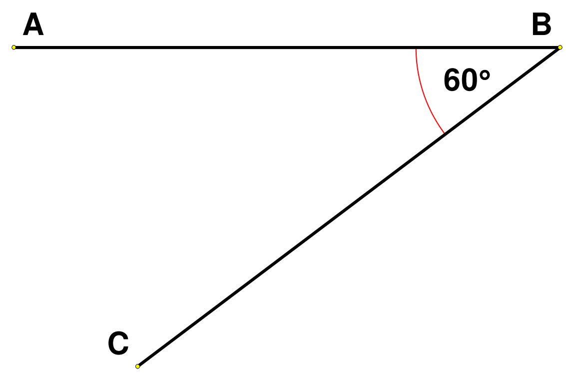
$$\Rightarrow \left[t = -\frac{b}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow t = -\frac{-212 \cdot v}{2 \cdot 7 \cdot v^2} \Rightarrow t = \frac{212 \cdot v}{2 \cdot 7 \cdot v^2} \Rightarrow t = \frac{106}{7 \cdot v}.$$

Broj kilometara koji će vlak prijeći od trenutka polaska iz mjesta A do trenutka u kojemu će zračna udaljenost između automobila i vlaka biti najkraća, iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{106}{7 \cdot v} \\ s_1 = v \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow s_1 = v \cdot \frac{106}{7 \cdot v} \Rightarrow s_1 = v \cdot \frac{106}{7 \cdot v} \Rightarrow s_1 = \frac{106}{7} \Rightarrow s_1 = 15.143.$$

Vježba 094

Mjesta A i B udaljena su 53 km i povezana ravnom željezničkom prugom, a mjesta B i C povezana su ravnom autocestom. Kut između ceste i pruge jest 60° kao što je prikazano na skici. U isto je vrijeme vlak krenuo iz mjesta A prema mjestu B, a automobil iz mjesta B prema mjestu C. Oba vozila kreću se konstantnim brzinama pri čemu je vlak dvostruko sporiji od automobila. Koliko će kilometara prijeći vlak od trenutka polaska iz mjesta A do trenutka u kojemu će zračna udaljenost između automobila i vlaka biti najkraća?



Rezultat: 15.143.

Zadatak 095 (Marijan, maturant)

Zadana je funkcija $f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 - p$ gdje je $p \in R$.

a) Za koju vrijednost parametra p umnožak rješenja jednadžbe f(x) = 0 iznosi 5?

b) Za koje vrijednosti parametra p funkcija f poprima pozitivne vrijednosti za svaki $x \in R$?

Rješenje 095

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Budući da tražimo sjecišta grafova zadanih funkcija, izjednačit ćemo izraze kojima su zadane te funkcije.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

a)
Budući da je umnožak rješenja jednadžbe f(x) = 0, tj,

$$3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 - p = 0$$

jednak 5, prema Vièteovoj formuli slijedi:

$$x_1 \cdot x_2 = 5 \Rightarrow \frac{c}{a} = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 - p \\ a = 3 \ , \ b = -6 \ , \ c = 2 - p \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{2-p}{3} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2-p}{3} = 5 \ / \cdot 3 \Rightarrow 2 - p = 15 \Rightarrow -p = 15 - 2 \Rightarrow -p = 13 \Rightarrow -p = 13 \ / \cdot (-1) \Rightarrow p = -13.$$

b)
Odredimo koeficijente kvadratne funkcije f.

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 - p \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 - p \\ a = 3 \ , \ b = -6 \ , \ c = 2 - p \end{matrix}\right\}.$$

Budući da je vodeći koeficijent a pozitivan

$$a = 3 > 0,$$

funkcija f poprima pozitivne vrijednosti za svaki $x \in R$ ako je njezina diskriminanta manja od nule (negativna).

$$D < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 3 \ , \ b = -6 \ , \ c = 2 - p \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2 - p) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 - 12 \cdot (2 - p) < 0 \Rightarrow 36 - 24 + 12 \cdot p < 0 \Rightarrow 12 \cdot p < -36 + 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot p < -12 \Rightarrow 12 \cdot p < -12 \ / : 12 \Rightarrow p < -1.$$

$$p \in \langle -\infty, -1 \rangle.$$

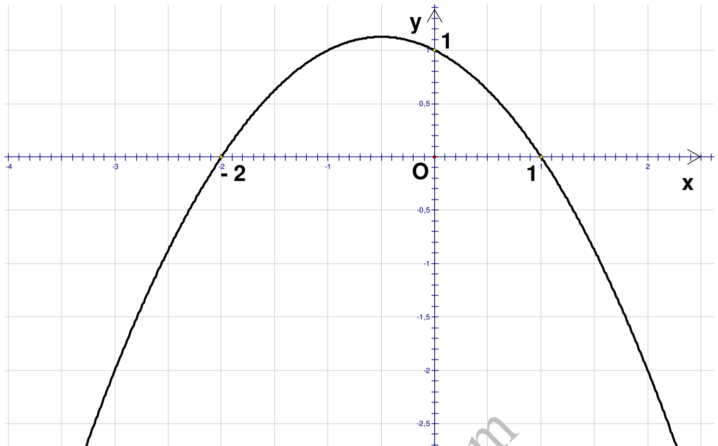
Vježba 095

Zadana je funkcija $f(x)=3\cdot x^{2}-6\cdot x+2-p$ gdje je $p\in R.$ Za koju vrijednost parametra p umnožak rješenja jednadžbe f(x) = 0 iznosi 4?

Rezultat: p = – 10.

Zadatak 096 (4A, 4B, TUPŠ)

Odredite koeficijente a, b, c kvadratne funkcije $f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c$ čiji je graf prikazan na slici.



Rješenje 096

Ponovimo!

$$a^{1}=a\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot b=a.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (y = 0). Vrijednost x za koju je f(x) = 0 zove se nulište funkcije. Najčešće se za oba pojma rabi izraz nultočka.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

parabola je

$$y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

s tjemenom u točki $T(x_0, y_0)$ dobivena translacijom parabole $y = a\cdot x^2$. U točki x_0 funkcija f poprima najmanju vrijednost y_0 ako je a > 0, a najveću vrijednost y_0 ako je a < 0.
Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Realna nultočka funkcije apscisa je točke u kojoj graf funkcije siječe (ili dira) x – os. Grafički nultočke određujemo tako da nacrtamo parabolu

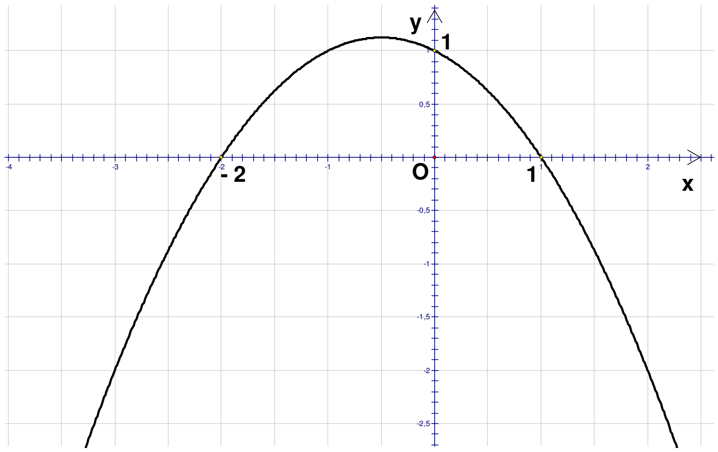
$$y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c$$

i odredimo točke na x – osi u kojima parabola siječe (ili dira) x – os. Ako su poznate nultočke x_1 i x_2 kvadratne funkcije, tada se ona može faktorizirati

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ x_1,\ x_2-\text{nultočke funkcije} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Sa slike vidi se da funkcija ima nultočke $x_1 = -2$ i $x_1 = 1$ pa njezina jednadžba izgleda ovako:

$$f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-(-2))\cdot(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=a\cdot(x+2)\cdot(x-1).$$

U nuli funkcija ima vrijednost 1.

$$f(0)=1.$$

Sada možemo izračunati vrijednost koeficijenta a.

$$f(x)=a\cdot(x+2)\cdot(x-1) \Rightarrow f(0)=a\cdot(0+2)\cdot(0-1) \Rightarrow f(0)=a\cdot 2\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0)=-2\cdot a \Rightarrow \left[\, f(0)=1 \,\right] \Rightarrow 1=-2\cdot a \Rightarrow 2\cdot a=-1 \Rightarrow 2\cdot a=-1 \ /:2 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

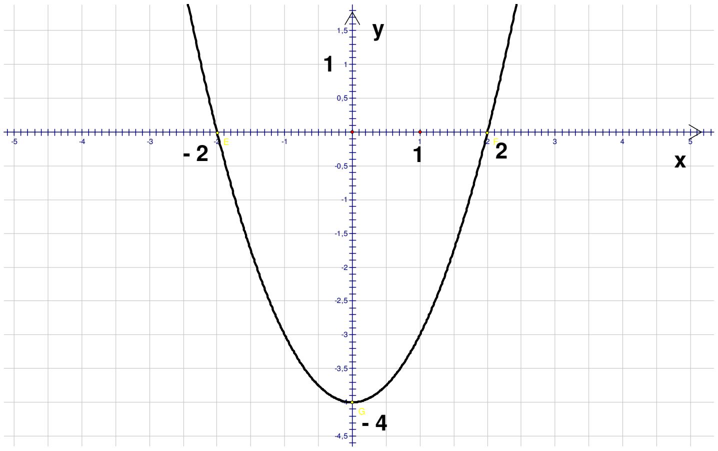
Tražena funkcija izgleda:

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot(x-1) \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-x+2\cdot x-2\right) \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+x-2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=1 \end{array}\right\}.$$

Vježba 096

Odredite koeficijente a, b, c kvadratne funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ čiji je graf prikazan na slici.



Rezultat: a = 1, b = 0, c = – 4.

Zadatak 097 (Larisa, gimnazija)

Riješite nejednadžbu $4 \cdot (x-1)^2 < 9$ i rješenje napišite uz pomoć intervala.

Rješenje 097

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$a < b < c \;,\; n \in R \;\Rightarrow\; a + n < b + n < c + n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad , \quad |x| < a \;,\; a > 0 \;\Rightarrow\; -a < x < a.$$

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ je parabola. Ovisno o mogućem predznaku vodećeg koeficijenta a parabola može biti okrenuta otvorom prema gore ili dolje.
Ako je $a > 0$, parabola je okrenuta otvorom prema gore.
Ako je $a < 0$, parabola je okrenuta otvorom prema dolje.

1.inačica

Preoblikujemo zadanu nejednadžbu.

$$4 \cdot (x-1)^2 < 9 \;\Rightarrow\; 4 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) < 9 \;\Rightarrow\; 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4 < 9 \;\Rightarrow\; 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4 - 9 < 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 5 < 0.$$

Trebamo riješiti nejednadžbu

$$4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 5 < 0.$$

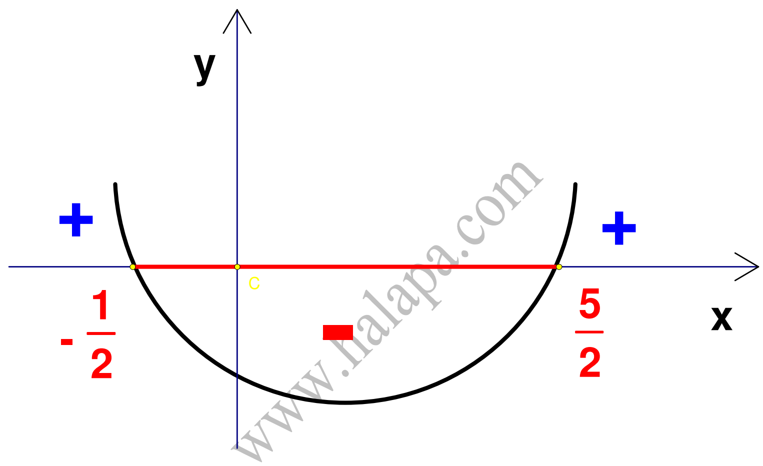
Najprije odredimo nultočke jednadžbe:

$$4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 5 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 5 = 0 \\ a = 4 \ , \ b = -8 \ , \ c = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 4 \ , \ b = -8 \ , \ c = -5 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm 12}{8} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{8-12}{8} \\ x_2 = \dfrac{8+12}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -\dfrac{4}{8} \\ x_2 = \dfrac{20}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -\dfrac{4}{8} \\ x_2 = \dfrac{20}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Nakon toga skiciramo njezin graf (to je parabola "otvorom" okrenuta prema gore, $a = 4 > 0$).



Graf kvadratne funkcije (parabola) siječe x – os u dvije točke: $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{5}{2}$. U točkama $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{5}{2}$ vrijedi jednakost =, pa one nisu rješenja zadane nejednadžbe <. Zato ih nismo popunili. Funkcija je negativna na onom intervalu gdje se njezin graf nalazi ispod x – osi.
Taj je interval (označeno crveno na slici) skup rješenja kvadratne nejednadžbe

$$4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 5 < 0.$$

Vidimo da graf leži ispod x – osi na dijelu od prve nultočke $x_1 = -\frac{1}{2}$ do druge nultočke $x_2 = \frac{5}{2}$.

Rješenje nejednadžbe

$$4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 5 < 0,$$

tj. nejednadžbe

$$4 \cdot (x-1)^2 < 9$$

je

$$x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle.$$

2.inačica

$$4\cdot(x-1)^2<9 \;\Rightarrow\; 4\cdot(x-1)^2<9 \;/\cdot\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; (x-1)^2<\frac{9}{4} \;\Rightarrow\; (x-1)^2<\frac{9}{4} \;/\sqrt{} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |x-1|<\sqrt{\frac{9}{4}} \;\Rightarrow\; |x-1|<\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2}<x-1<\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2}<x-1<\frac{3}{2} \;/+1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\frac{3}{2}+1<x-1+1<\frac{3}{2}+1 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2}+\frac{1}{1}<x-1+1<\frac{3}{2}+\frac{1}{1} \;\Rightarrow\; \frac{-3+2}{2}<x<\frac{3+2}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2} \;\Rightarrow\; x\in\left\langle -\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\rangle.$$

Vježba 097

Riješite nejednadžbu $4\cdot(x-1)^2-9<0$ i rješenje napišite uz pomoć intervala.

Rezultat: $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\rangle.$

Zadatak 098 (Pero, tehnička gimnazija)

Odredi polinom drugog stupnja $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$ ako su nultočke suprotni brojevi i ako je f(– 4) = 2, f(0) = – 6.

Rješenje 098

Ponovimo!

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi $f(x_0) = 0$. Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (dakle y = 0). Nultočke kvadratne funkcije (polinoma drugog stupnja) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ rješenja su pripadne kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ jer je za njih f(x) = 0. Njezine realne nultočke sjecišta su njezinoga grafa s osi x.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\;,\;\; n\neq 0\;,\;\; n\neq 1.$$

Najprije pokažimo da polinom drugog stupnja $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ čije su nultočke suprotni brojevi ima oblik $f(x)=a\cdot x^2+c.$

Neka su zadana dva suprotna broja $x_1 = x_0$ i $x_2 = – x_0$, $x_0 \neq 0$ koji su nultočke polinoma $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$ Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x_1^2+b\cdot x_1+c=0 \\ a\cdot x_2^2+b\cdot x_2+c=0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; a\cdot x_1^2+b\cdot x_1+c=a\cdot x_2^2+b\cdot x_2+c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a\cdot x_o^2+b\cdot x_o+c=a\cdot(-x_o)^2+b\cdot(-x_o)+c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a\cdot x_o^2+b\cdot x_o+c=a\cdot x_o^2-b\cdot x_o+c \;\Rightarrow\; a\cdot x_o^2+b\cdot x_o+c=a\cdot x_o^2-b\cdot x_o+c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b\cdot x_o=-b\cdot x_o \;\Rightarrow\; b\cdot x_o+b\cdot x_o=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot b\cdot x_o=0 \;\Rightarrow\; \left[\,x_o\neq 0\,\right] \;\Rightarrow\; b=0.$$

Polinom drugog stupnja ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+c.$$

Dalje slijedi:

$$f(x)=a\cdot x^2+c \Rightarrow \begin{bmatrix} f(0)=-6 \\ f(-4)=2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot 0^2+c=-6 \\ a\cdot(-4)^2+c=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot 0+c=-6 \\ 16\cdot a+c=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 0+c=-6 \\ 16\cdot a+c=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c=-6 \\ 16\cdot a+c=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 16\cdot a-6=2 \Rightarrow 16\cdot a=2+6 \Rightarrow 16\cdot a=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot a=8 \;/\cdot\frac{1}{16} \Rightarrow a=\frac{8}{16} \Rightarrow a=\frac{8}{16} \Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Polinom glasi:

$$f(x)=a\cdot x^2+c \Rightarrow \begin{bmatrix} a=\frac{1}{2} \\ c=-6 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-6.$$

Vježba 098

Odredi polinom drugog stupnja čije su nultočke suprotni brojevi te za koji je f(0) = 2, f(– 4) = – 6.

Rezultat: $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2+2.$

Zadatak 099 (2B, TUPŠ)

Odredi broj m tako da točka A(1, 8) pripada grafu funkcije $f(x)=2\cdot m\cdot x^2.$

Rješenje 099

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

parabola je

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

s tjemenom u točki T(x_0, y_0) dobivena translacijom parabole y = a · x^2.

Budući da točka A mora ležati na paraboli $y=2\cdot m\cdot x^2$, uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu parabole.

$$\left.\begin{matrix} A(x,\ y)=A(1,\ 8) \\ y=2\cdot m\cdot x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8=2\cdot m\cdot 1^2 \Rightarrow 8=2\cdot m\cdot 1 \Rightarrow 8=2\cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot m=8 \Rightarrow 2\cdot m=8 \;/:2 \Rightarrow m=4.$$

Vježba 099

Odredi broj m tako da točka A(1, 4) pripada grafu funkcije $f(x)=2\cdot m\cdot x^2.$

Rezultat: m = 2.

Zadatak 100 (2B, TUPŠ)

Odredimo koeficijent a u funkciji $f(x)=a\cdot x^2$, tako da njezin graf prolazi točkom A(– 1, 10).

Rješenje 100

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

parabola je

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

s tjemenom u točki $T(x_0, y_0)$ dobivena translacijom parabole $y = a \cdot x^2$.

Budući da točka A mora ležati na paraboli $y=a\cdot x^2$, uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu parabole.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(-1,\ 10) \\ y=a\cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 10=a\cdot(-1)^2\ \Rightarrow\ 10=a\cdot 1\ \Rightarrow\ 10=a\ \Rightarrow\ a=10.$$

Dakle, radi se o funkciji

$$f(x)=10\cdot x^2.$$

Vježba 100

Odredimo koeficijent a u funkciji $f(x)=a\cdot x^2$, tako da njezin graf prolazi točkom A(– 1, 5).

Rezultat: $f(x)=5\cdot x^2.$